Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2013/2014
18 de Novembro de 2013
Duração: 45 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 2 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Engenharia Aeroespacial

1) a) $V_1 = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \{(-2y-3z-4w, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y, z, w \in \mathbb{R}\}$, $\dim(V_1) = 3$ (número de colunas - característica). Por outro lado,

$$(-2y-3z-4w, y, z, w) = y(-2,1,0,0) + z(-3,0,1,0) + w(-4,0,0,1)$$

donde $\{(-2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-4,0,0,1))\}$ é uma base para V_1

b) Note-se que $(x,y,z,w) \in V_2$ sse o sistema cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 3 & y \\ 0 & 2 & 6 & z \\ 2 & -2 & -2 & w \end{array}\right]$ for possível (e V_2 é o espaço colunas da matriz dos coeficientes). Aplicando o método de eliminação de Gauss temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 3 & y \\ 0 & 2 & 6 & z \\ 2 & -1 & -3 & w \end{array}\right] \xrightarrow{-L_1+L_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 3 & y \\ 0 & 2 & 6 & z \\ 0 & 0 & -4 & w-x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 3 & y \\ 0 & 0 & -4 & w-x \\ 0 & 0 & 0 & z-2y \end{array}\right].$$

Portanto $\{(2,0,0,2), (-1,1,2,-1), (1,3,6,-3)\}$ é uma base para V_2 (base para o espaço colunas da matriz) e $V_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z - 2y = 0\}$.

c) Por a) e b), $V_1 \cap V_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y+3z+4w = 0, z-2y = 0,\} = \mathcal{N}(D_0)$ onde $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Como $\operatorname{car}(D_0) = 2$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$, e portanto pelo teorema das dimensões,

$$\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 3+3-2 = 4, \text{ isto é, } V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4.$$

Assim podemos considerar $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$.

2) Note que $\dim(V) = 2$ pelo que 2 quaisquer vectores linearmente independentes de V formam uma base para V. Como $(1,0,a) \in V$ see $a = 2$, concluímos que $a = 2$ é o único escalar tal que $\{(1,1,1), (1,0,a)\}$ é base para V . Sejam (α_1, α_2) as coordenadas de v nessa base, isto é

$$(5,2,8) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,2)$$

donde facilmente se conclui que $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 3$.

3) a) A matriz nula está em U e o fecho da soma vectorial verifica-se pois $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & \overline{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & \overline{x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+x' & \overline{y+y'} \\ -y-y' & \overline{x+x'} \end{bmatrix}$. Por outro lado, para $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \begin{bmatrix} x & y \\ -y & \overline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ -(\alpha y) & \overline{\overline{\alpha} x} \end{bmatrix}$ pelo que o fecho da multiplicação por escalares complexos <u>não</u> se verifica, enquanto que o fecho da multiplicação por escalares reais verifica-se. Conclusão: U é um espaço linear real.

b) Sendo $x = a+ib$ e $y = c+id$ com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & \overline{x} \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que facilmente se conclui que $\dim(U) = 4$.