RESOLUÇÃO DO TESTE 1 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Engenharia Aeroespacial

1) Usando operações elementares temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3L_1+L_3]{-2L_1+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \alpha^2+4 & \alpha \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \alpha^2+4 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right].$$

a) Assim, pelo método de eliminação de Gauss temos que:
- para $\alpha \neq -1$ o sistema é possível e indeterminado;
- para $\alpha = -1$ o sistema é impossível.

b) Para $\alpha = 1$ a matriz aumentada em escada por linhas é: $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. O sistema é possível e indeterminado e podemos escolher x, w para as variáveis livres; além disso, $z = -\frac{1}{5}+w$, $y = -2z+2w = \frac{2}{5}$. Portanto o conjunto solução $\mathcal{S}$ é

$$\mathcal{S} = \{(x, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}+w, w) \in \mathbb{R}^4 : x, w \in \mathbb{R}\}.$$

2) a) Se $A \xrightarrow[3L_1+L_2]{} B$ então $E_{12}(3)A = B$ onde $E_{12}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$B^{-1} = A^{-1}E_{12}(3)^{-1} = A^{-1}E_{12}(-3) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

b) $\det(2A-6A^2) = \det\left(2A^2(A^{-1}-3I)\right) = 2^3\det(A^2)\det(A^{-1}-3I) = 2^3\det(A^2)\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -5 \end{bmatrix} = 0.$

3) $\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 7 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_4}{=} \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 4ª linha}}}{=} -8\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 1ª colna}}}{=} -16\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = 16.$

4) Se $\det(A) = 0$ então A é não invertível, pelo que existe $\mathtt{x}_0$ **não nulo** tal que $A\mathtt{x}_0 = \mathbf{0}$. Seja $B = [\mathtt{x}_0\, 0 \cdots 0]$ (matriz cuja coluna 1 é $\mathtt{x}_0$ e as restantes colunas são todas nulas). É óbvio que $AB = \mathbf{0}$.

Reciprocamente, se existe B não nula tal que $AB = \mathbf{0}$, então $A\mathtt{b}_i = \mathbf{0}$ para qualquer $i = 1, ..., n$ onde $\mathtt{b}_i$ designa a coluna i de B (note que $AB = [A\mathtt{b}_1\ A\mathtt{b}_2 \cdots A\mathtt{b}_n]$). Ora, como B é não nula, podemos concluir que existe i tal que $A\mathtt{b}_i = \mathbf{0}$ e $\mathtt{b}_i \neq \mathbf{0}$, logo o sistema homogéneo $A\mathtt{x} = \mathbf{0}$ tem soluções não triviais. Logo A é não invertível, pelo que $\det(A) = 0$.