Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2013/2014
15 de janeiro de 2014
Duração: 90 + 90 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: MEAer

I (T1 +T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. Usando o método de eliminação de Gauss: $\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha & 0 & 2 \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 2\alpha & \alpha^2-1 & 4 \\ 3\alpha & 3\alpha & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-2L_1+L_3 \\ -3L_1+L_4}]{-L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

   (a) Assim o sistema linear é: impossvel para $\alpha = 0$, possível e determinado para $\alpha \notin \{0, \pm 1\}$. Para $\alpha = \pm 1$ o sistema é indeterminado.

   (b) Se existir um tal α então $(1,1,0) \in \mathcal{S}_\alpha$; por outro lado $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para todo o α. Portanto não existe nenhum α para o qual $\mathcal{S}_\alpha = \{(1-z, 1+z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) $\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 1ª linha}}}{=} 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 3ª coluna}}}{=} -3 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -3(1-6) = 15.$

   (b) $(A^{-1})_{(3,4)} = \frac{(-1)^{4+3} \det(A_{43})}{\det A} = \frac{-\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}}{15} = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5}.$

   (c) Como, $\det(-A^T \mathtt{X} A^{-2}) A^{-1} \mathtt{X} = A^{-1} + I \iff (-1)^4 \det(A) \det(\mathtt{X}) \frac{1}{\det(A^2)} A^{-1} \mathtt{X} = A^{-1} + I \iff \frac{\det(\mathtt{X})}{15} \mathtt{X} = I + A$, se existir uma tal matriz $\mathtt{X}$ não invertível (logo $\det(\mathtt{X}) = 0$) concluímos que $\mathbf{0} = I + A$ o que é absurdo.

3. (a) Como $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B}$=$\{(0,1,-1), (1,-2,0)\}$ é uma base para V. Sejam (α_1, α_2) as coordenadas de $(-2,4,0)$ na base $\mathcal{B}$, i.e. $(-2,4,0) = \alpha_1(0,1,-1) + \alpha_2(1,-2,0)$. Claro que $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, -2)$.

   (b) Pretendemos encontrar um vector (a,b,c) tal que $\{(0,1,-1), (1,-2,0), (a,b,c)\}$ seja uma base para $\mathbb{R}^3$, i.e. $\operatorname{car}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} = 3$. P.ex. $(a,b,c) = (0,0,1)$.

   (c) Podemos usar $(0,1,-1)$ na 1^a coluna de A, pelo que como A antisimétrica, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \\ -1 & x & 0 \end{bmatrix}$ para algum x. Ora $(-1,0,x) \in V$ sse $x = 2$, por outro lado, $(1,-2,0) \in V$. Logo $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. (Agora é fácil confirmar que esta matriz satisfaz as propriedades requeridas).

   (d) P. ex., $W = L(\{(0,0,1)\})$, pois por b), $V + W = \mathbb{R}^3$ pelo que $\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V+W) = 2 + 1 - 3 = 0$.

4. Note que $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB)$, pelo que $\dim\mathcal{N}(B) \leq \dim\mathcal{N}(AB)$. Mas $\dim\mathcal{N}(B) + \operatorname{car}(B) = n$ e $\dim\mathcal{N}(AB) + \operatorname{car}(AB) = n$, pelo que $\operatorname{car}(AB) \leq \operatorname{car}(B)$ ($\spadesuit$). Podemos usar o facto de $\operatorname{car}(X^T) = \operatorname{car}(X)$ para toda a matriz X e concluir $\operatorname{car}(AB) \leq \operatorname{car}(A)$, pois

$$\operatorname{car}(AB) = \operatorname{car}((AB)^T) = \operatorname{car}(B^T A^T) \underset{\text{usando}(\spadesuit)}{\leq} \operatorname{car}(A^T) = \operatorname{car}(A).$$

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. (a) Os dados indicam que u e v são vectores próprios de A associados a valores próprios distintos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$ de A. Portanto A é diagonalizável tendo-se

$$A{=}S^{-1}DS{=}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1}{=}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}{=}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

   (b) Podemos usar a matriz A de a) e escrever o sistema de equações diferenciais na forma $Ax(t) = x'(t)$ com $x(t) = [x_1(t))\ x_2(t)]^T$. Como A é diagonalizável, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1e^{\lambda_1 t} \\ c_2e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2e^{-t} \\ 2c_1 + 3c_2e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \text{mas} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1 + 3c_3 \end{bmatrix} = x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   logo $c_1 = 3, c_2 = -2$ e assim $x_1(t) = 3 - 2e^{-t}$, $x_2(t) = 6 - 6e^{-t}$.

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}^{1000}{=}A^{1000} = (S^{-1}DS)^{1000}{=}S^{-1}D^{1000}S{=}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}{=}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}.$

2. (a) Como $T(1) = (1,1,1) + \langle(1,1,1),(1,0,0)\rangle(1,0,0) = (2,1,1)$,
   $T(t) = (0,1,-1) + \langle(0,1,-1),(1,0,0)\rangle(1,0,0) = (0,1,-1)$
   e $T(t^2) = (0,1,1) + \langle(0,1,1),(1,0,0)\rangle(1,0,0) = (0,1,1)$,
   $A = M(T; Bc, Bc) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

   (b) Note que A é invertível, pelo que $\mathcal{N} = \{0\}$ e $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$. Logo $\emptyset$ e $\{(1,0,0)),(0,1,0),(0,0,1)\}$ são bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$ respectivamente — T é bijectiva (dim$\mathcal{N}(T) = 0$ e dim$\mathcal{I}(T)$ é a dimensão do espaço de chegada).

   (c) Como T é bijectiva, há um único $p(t)$ tal que $T(p(t)) = (0,1,1)$ (por a) é claro que $p(t) = t^2$).

3. (a) Como $V = \mathcal{N}[1\ -1\ 2\ 0]$, $V^\perp = \mathcal{L}[1\ -1\ 2\ 0]$, logo $\{(1,-1,2,0)\}$ é uma base para $V^\perp$.

   (b) Como $V = \{(y - 2z, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y,z,w \in \mathbb{R}\}$, $\{(1,1,0,0),(-2,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base para V (note que o 3^o vector é ortogonal aos anteriores). Aplicando o processo de Gram-Schmidt a esta base onbtém-se a base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de V onde $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (-2,0,1,0) - \text{proj}_{(1,1,0,0)}(-2,0,1,0) = (-1,1,1,0)$ e $v_3 = (0,0,0,1)$.

   (c) $d((1,1,3,1),V^\perp) = ||P_V(1,1,3,1)|| = ||(1,1,3,1) - P_{V^\perp}(1,1,3,1)||$
   $= ||(1,1,3,1) - \frac{\langle(1,1,3,1),(1,-1,2,0)\rangle}{\langle(1,-1,2,0),(1,-1,2,0)\rangle}(1,-1,2,0)|| = ||(1,1,1,1) - \frac{6}{6}(1,-1,2,0)|| = ||(0,2,-1,1)|| = \sqrt{6}.$

4. Como A é normal, A é unitariamente diagonalizável, pelo que existem matrizes U unitária e D matriz diagonal (a entrada (j,j) de D é o valor próprio λ_j de A, $j \in \{1,...,n\}$) tais que $A = U^*DU$. Logo

$$AA^* = (U^*DU)(U^*DU)^* = U^*DUU^*D^*U = U^*DD^*U = U^*\begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix}U \qquad (\heartsuit).$$

Por outro lado $tr(AA^*) = \sum_i (AA^*)_{(i,i)} = \sum_i \sum_j A_{i,j}(A^*)_{j,i} = \sum_{i,j} a_{i,j}\overline{a}_{i,j} = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$, pelo que aplicando o traço em $(\heartsuit)$ obtém-se o pretendido pois $tr(U^*DD^*U){=}tr(DD^*UU^*){=}tr(DD^*){=}\sum_i |\lambda_i|^2$.