Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2013/2014
15 de janeiro de 2013
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSO: Engenharia Aeroespacial

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $\mathcal{S}_\alpha$ o conjunto solução do sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha & 0 & 2 \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 2\alpha & \alpha^2-1 & 4 \\ 3\alpha & 3\alpha & 0 & 6 \end{array}\right].$$

   (a) (1.0) Discuta em termos de α a existência ou não de solucão do sistema de equações lineares anterior.

   (b) (1.0) Verifique se existe algum α tal que $\mathcal{S}_\alpha = \{(1-z, 1+z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Calcule $\det(A)$.

   (b) (1.0) Encontre a entrada $(3,4)$ de A^{-1}.

   (c) (1.0) Determine, caso exista, uma matriz não invertível $\mathtt{X}$ tal que $\det(-A^T\mathtt{X}A^{-2})A^{-1}\mathtt{X}{=}A^{-1}+I$.

3. Seja $V = L(\{(0,1,-1), (-1,2,0), (1,-1,-1)\})$.

   (a) (1.0) Determine as coordenadas de $(-2,4,0)$ numa base ordenada de V.

   (b) (1.0) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua os vectores de uma base de V.

   (c) (1.0) Determine, caso exista, $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ antisimétrica ($A^T = -A$) tal que $V = \mathcal{C}(A)$.

   (d) (1.0) Construa um subespaço linear W de $\mathbb{R}^3$ tal que $V \cap W = \{(0,0,0)\}$ e $\dim(W) \geq 1$.

4. (1.0) Sendo A e B matrizes $n \times n$, prove que $\mathrm{car}(AB) \leq \mathrm{car}(A)$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. Sejam $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Construa uma matriz A tal que $Au = \mathbf{0}$ e $Av = -v$.

   (b) (1.0) Determine a solução do sistema de equações diferenciais $\begin{cases} 2x_1(t) - x_2(t) = x_1'(t) \\ 6x_1(t) - 3x_2(t) = x_2'(t), \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, tal que $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 0$.

   (c) (1.0) Calcule $\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \right)^{1000}$.

2. Considere $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual, $u = (1,0,0)$, $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(p(t)) = (p(0), p(1), p(-1)) + \big\langle (p(0), p(1), p(-1)), u \big\rangle \, u.$$

   (a) (1.0) Determine a representação matricial $M(T; Bc; Bc)$ de T nas bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^3$.

   (b) (1.0) Encontre bases para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e imagem $\mathcal{I}(T)$ e verifique se T é bijectiva.

   (c) (1.0) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p(t)) = (0,1,1)$.

3. Considere $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0\}$.

   (a) (1.0) Determine uma base para $V^\perp$.

   (b) (1.0) Determine uma base ortogonal para V.

   (c) (1.0) Calcule a distância entre $(1,1,3,1)$ e $V^\perp$.

4. (1.0) Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ normal e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os valores próprios de A. Prove que então

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

FIM