UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

ÁLGEBRA LINEAR

PROVA ORAL

O presente trabalho serviu de suporte teórico à apresentação realizada no âmbito da prova oral de Álgebra Linear, disciplina integrante do plano curricular de Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial do Instituto Superior Técnico de Lisboa. O tema da referida apresentação é Modelos Económicos de Leontief, tendo esta sido realizada com o intuito de defender a nota final alcançada.

MODELOS ECONÓMICOS DE LEONTIEF

Wassily Leontief, economista russo que viveu entre 1905 e 1999, foi o responsável pelo desenvolvimento de teorias que revolucionaram a economia do século XX e que constituem um importante legado em pleno século XXI. *Leontief* foi galardoado com o Prémio Nobel das Ciências Económicas em 1973, ao aplicar à economia contemporânea uma teoria onde a Álgebra Linear se encontra subjacente. Nos alicerces desta teoria, composta por dois modelos económicos, encontramos princípios que nos são familiares e constituem a base da presente unidade curricular, o cálculo matricial como instrumento para resolver sistemas lineares.

Os dois modelos que constituem a presente teoria, nomeadamente, o modelo fechado ou *input-output* e o modelo aberto, apesar de distintos apresentam o mesmo fim: a análise das relações económicas entre diferentes tipo de indústrias de modo a determinar um ponto de equilíbrio que permita satisfazer simultaneamente a oferta e a procura. Deste modo, os referidos modelos tornam-se essenciais na previsão do impacto de determinadas alterações económicas num dado setor da economia sobre os restantes.

Modelo fechado ou *input-output*

O modelo fechado ou input-output, como a própria designação indica, adota a igualdade entre o valor das despesas de cada indústria e o valor das suas receitas como fator determinante na garantia do equilíbrio de um sistema económico constituído por um número finito de indústrias. Assim, este modelo económico será utilizado com o intuito de determinar o valor que uma indústria deve cobrar pela venda de um bem ou serviço, de modo a que as despesas e receitas se igualem.

Analisemos o seguinte exemplo:

Três colegas de trabalho descobriram recentemente que durante o fim-de-semana se dedicam a três atividades distintas: pesca, caça e agricultura. Dada a conjuntura atual, todos eles objetivam a venda dos produtos que adquirem, uma vez que consideram os seus salários bastante reduzidos e é nestas três atividades que procuram refúgio para alcançar algum conforto económico.

Decidiram que na segunda-feira seguinte, cada um levaria para o trabalho 10 dos produtos que adquirissem no fim-de-semana, a fim de serem vendidos entre si, segundo a tabela:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="3">PRODUTOS VENDIDOS</th></tr>
<tr><th>Caçador</th><th>Pescador</th><th>Agricultor</th></tr>
<tr><th rowspan="3">PRODUTOS COMPRADOS</th><td>Caçador</td><td>2</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Pescador</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Agricultor</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr>
</table>

Considerando p_1, p_2 e p_3 o preço dos produtos vendidos pelo caçador, pelo pescador e pelo agricultor, respetivamente, a fim de garantir a referida igualdade entre receitas e despesas, devem-se verificar as seguintes equações:

$$2p_1 + 1p_2 + 6p_3 = 10p_1$$
$$4p_1 + 5p_2 + 1p_3 = 10p_2$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 10p_3$$

Resta-nos resolver o sistema constituído pelas equações lineares apresentadas, de modo a determinar os preços que permitem estabelecer o equilíbrio entre o sistema económico constituído pelos três colegas. Dividindo todas as equações por 10, de modo a que os coeficientes representem a fração de produtos de cada um deles comprada por cada um dos colegas.

$$0.2p_1 + 0.1p_2 + 0.6p_3 = p_1$$
$$0.4p_1 + 0.5p_2 + 0.1p_3 = p_2$$
$$0.4p_1 + 0.4p_2 + 0.3p_3 = p_3$$

O sistema poderá ser resolvido recorrendo ao cálculo matricial:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \text{, onde } \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \text{ é a "matriz input-output".}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$$

, onde s é uma constante que pode ser escolhida arbitrariamente pelos trabalhadores.

<u>Generalizando:</u>

Considere-se, então, que um conjunto finito de indústrias, 1, ... , k, constitui um sistema económico.

Seja p a matriz-coluna onde cada entrada, p_i, representa o valor cobrado por uma indústria na venda de um bem ou serviço e E a "matriz input-output", onde cada entrada, e_{ij}, representa a fração das vendas totais da indústria j compradas pela indústria

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_k \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} e_{11} & \dots & e_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{k1} & \dots & e_{kk} \end{bmatrix}$$

Por definição, cada entrada p_i do vetor preço, bem como cada entrada e_{ij} da matriz input-output, deve ser não negativa. A soma de todas as entradas de cada coluna da matriz E deve ainda ser igual a 1.

Nestas condições, à semelhança do exemplo supracitado, para que as despesas e receitas de cada indústria sejam equivalentes e o sistema económico por elas formado esteja em equilíbrio, é necessário que se verifique a seguinte equação:

$$Ep = p$$

Deste modo, se resolvermos a equação $(I - E)p = 0$, obtemos o valor dos bens ou serviços vendidos por cada indústria que garante o equilíbrio do sistema. No entanto, só teremos soluções não triviais no caso de determinante da matriz I-E ser nulo, o que acontece para todas as matrizes input-output, já que a soma das suas colunas é 1.

Do modelo económico fechado sugerido por *Leontief* resulta um teorema cuja aplicação é de extrema relevância na economia contemporânea:

TEOREMA 1: Se E for uma matriz input-output, então $Ep=p$ tem sempre uma solução não trivial p, cujas entradas são não negativas.

Ainda assim, o teorema não garante que um dos preços encontrados seja nulo, ou que haja apenas uma estrutura de preços que garanta o equilíbrio (basta que a dimensão do núcleo seja superior a 2) e, na verdade, nenhuma destas situações representa um sistema económico independente. Deste modo, Leontief sugeriu um segundo teorema que garante a existência de uma única estrutura de preços, em que nenhum deles é 0:

TEOREMA 2: Seja E uma matriz input-output tal que para um determinado inteiro positivo E^m tenha todas as entradas positivas. Nessa situação haverá um única solução linearmente independente da equação $(I - E)p = 0$, e pode ser selecionada de modo a que todas as entradas de p sejam estritamente positivas.

Modelo aberto

Enquanto no modelo económico fechado as indústrias constituintes de um determinado sistema apenas estabeleciam trocas comerciais entre si, no modelo aberto, como o próprio nome indica, para além destas, ainda têm que satisfazer uma procura exterior ao sistema. Deste modo, se no modelo anterior o objetivo era determinar os preços que garantiam o equilíbrio, no presente modelo, o preço é um valor fixo e o objetivo é determinar os índices de produção que permitem a uma indústria satisfazer a referida procura exterior. A fim de melhor perceber modelo aberto analisemos o seguinte exemplo, na linha de ordem do exemplo anterior:

O indivíduo que se dedicava à caça como atividade secundária terá redigido um contrato com um talho, no qual este comprava os produtos do caçador e garantia todas as suas despesas com o material de caça em troca de uma pequena percentagem do que este produzisse. Assim, de cada euro produzido pelo caçador, 0,2euros são para consumo próprio e 0,1euros são para o talho, pela garantia das suas despesas. Por sua vez, de cada euro produzido pelo talho, 0,4euros são para o caçador. Numa determinada semana, tanto o caçador como o talho recebem um pedido na quantia de 76euros de entidades exteriores ao sistema. Quanto é que cada um deles terá que produzir nessa semana a fim de garantir as procuras interior e exterior ao sistema?

Em primeiro lugar, defina-se, genericamente, para um conjunto finito de indústrias 1, ..., k:

x_i - valor monetário total produzido pela indústria i

$$\text{Vetor produção:} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{bmatrix}$$

d_i - valor monetário cuja produção é necessária para que a indústria i satisfaça a procura exterior ao sistema

$$\text{Vetor procura:} \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_k \end{bmatrix}$$

c_{ij} - valor que a indústria j tem que pagar à indústria i para produzir uma unidade monetária

$$\text{Matriz Consumo } C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{bmatrix}$$

Uma indústria j diz-se lucrativa se a soma de todas as entradas da coluna j da matriz consumo for inferior a 1.

No contexto do problema apresentado,

$$d = \begin{bmatrix} 76 \\ \\ 76 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Pelas definições apresentadas, $c_{ij}x_j$ representa o valor monetário produzido pela indústria i necessário para que a indústria j satisfaça as suas procuras interior e exterior. Assim, $c_{i1}x_1 + \dots + c_{ik}x_k$ representa o valor monetário total produzido pela indústria i, necessário para que todas as outras indústrias satisfaçam as suas procuras. Deste modo, Cx é o vetor coluna em que cada entrada representa o valor monetário total produzido por cada indústria, necessário para que todas as outras satisfaçam as suas procuras. Assim, ao fazer a subtração x-Cx, obtemos um excedente que será utilizado para efetuar as trocas com entidades exteriores ao sistema económico. Para que se verifique o equilíbrio económico, d=x-Cx, isto é, (I-C)x=d. Resta-nos então resolver esta equação na situação prática apresentada. *(Equação resolvida no quadro)*

Desta resolução resulta uma definição também da autoria de Leontief:

<u>Definição:</u> Uma matriz consumo C só é produtiva, isto é, só consegue satisfazer a procura exterior ao sistema, se $(I-C)^{-1}$ existir e todas as suas entradas foram não negativas.

Para verificar se $(I-C)^{-1}$ é invertível, utiliza-se um teorema designado Matriz de Consumo Produtiva:

TEOREMA: Uma matriz de consumo C é produtiva se e só se existe um vetor de produção x>=0, tal que x>Cx.

Deste teorema resultam ainda dois corolários que permitem à partida verifica se uma matriz de consumo é produtiva:

Corolário 1: Uma matriz de consumo é produtiva se a soma de cada uma das suas linhas for inferior a 1.

Corolário 2: Uma matriz de consumo é produtiva se a soma de cada uma das suas colunas for inferior a 1, ou seja, se todas as indústrias forem lucrativas.

Martim Novais Cálão

Lisboa, 31 de Janeiro de 2014