Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2012/2013
22 de Dezembro de 2012
Duração: 90 minutos

3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: MEAer

1) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) Verifique que $p(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)$ é o polinómio característico de A e justifique que A é ortogonalmente diagonalizável.

b) (1.0) Determine uma matriz diagonal D e uma matriz ortogonal Q tais que $D = QAQ^T$.

c) (1.0) Calcule $\sqrt{A^{-1}}$.

d) (1.5) Prove que a aplicação $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Usando este produto interno, calcule a distância $d(p, U)$ entre $p = (a, b)$ e a recta

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}.$$

2) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to V$, onde $V = L(\{v_1, v_2\})$ com $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ e $v_2 = (0, 0, 1, 1))$, a transformação linear cuja representação matricial relativamente às bases $\mathcal{B}_1 = \{1, 1+t, 1-t^2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2\}$ é:

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Calcule $T(2 + t - t^2)$.

b) (1.0) Justifique se T é injectiva ou sobrejectiva.

c) (1.0) Determine uma base para o núcleo de T.

d) (1.0) Resolva em $\mathcal{P}_2$ a equação linear $T(p(t)) = T(2 + t - t^2)$.

e) (1.0) Existirá alguma transformação linear $R : V \to \mathbb{R}^4$ tal que $(R \circ T)(p(t)) = T(p(t))$, para qualquer $p(t) \in \mathcal{P}_2$?

3) (0.5) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $AB = BA$ e A tem dois valores próprios distintos. Prove que B é diagonalizável.

FIM