Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2012/2013
22 de Dezembro de 2012
Duração: 90 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 3 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: MEAer

1) a) $p(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = (2-\lambda+1)(2-\lambda-1) = (3-\lambda)(1-\lambda).$
Assim $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ são os valores próprios de A. A matriz A é ortogonalmente diagonalizável porque A é real e simétrica.

b) A matriz diagonal é $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Por outro lado, $E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(A-\lambda_1 I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ donde $\{(1,1)\}$ é uma base de E_{λ_1} e $E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(A-\lambda_2 I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$ donde $\{(-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.
Ortonormalizando os vectores $\{(1,1),(-1,1)\}$ obtêm-se as colunas de $Q^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Por b) temos $A=Q^T DQ$, pelo que A^{-1} é definida positiva e $A^{-1}=Q^T D^{-1} Q$, logo $\sqrt{A^{-1}}=Q^T\sqrt{D^{-1}}Q=$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}.$$

d) Como $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ com $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ simétrica e valores próprios positivos (por a)), a aplicação define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.
Em segundo lugar, $\{(2,1)\}$ é uma base de U e como $\langle (x,y),(2,1)\rangle = 3x$, $\{(0,1)\}$ é uma base de $U^\perp$ pois

$$U^\perp = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \langle (x,y),(2,1)\rangle = 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x = 0\}$$

Finalmente, como $\langle (a,b),(0,1)\rangle = -a+2b$ e $||(0,1)|| = \sqrt{\langle (0,1),(0,1)\rangle} = \sqrt{2}$ temos:

$$d(p,U) = ||P_{U^\perp}(a,b)|| = \left|\left| \frac{\langle (a,b),(0,1)\rangle}{||(0,1)||^2}\,(0,1) \right|\right| = \frac{|\langle (a,b),(0,1)\rangle|}{||(0,1)||} = \frac{|a-2b|}{\sqrt{2}}.$$

2) Usando eliminação de Gauss temos: $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2L_1+L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) $T(2+t-t^2)=T\left(0(1)+1(1+t)+1(1-t^2)\right)=T(1+t)+T(1-t^2) = (5v_1+6v_2)+(9v_1+10v_2)=(14,14,30,30)$.
b) Como $\mathrm{car}(A) = 2$, $\dim(\mathcal{C}(T)) = 2$ pelo que T é sobrejectiva (pois a dimensão do espaço de chegada também é 2). Como $\dim(\mathcal{N}(A)) = 1$, T não é injectiva, pois $\dim(\mathcal{N}(A)) \neq 0$.
c) Note que $\mathcal{N}(A) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+5y+6z=0, y+2z=0\} = \{(z,-2z,z)\in\mathbb{R}^3 : z\in\mathbb{R}\}$, pelo que $\{(\mathbf{1},-\mathbf{2},\mathbf{1})\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$. Assim, $\{-2t-t^2\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$, porque $\mathbf{1}(1)-\mathbf{2}(1+t)+\mathbf{1}(1-t^2) = -2t-t^2$.
d) Como $2+t-t^2$ é solução particular de $T(p(t))=T(2+t-t^2)$, a solução geral da equação linear é:

$$\text{solução particular} \quad + \quad \mathcal{N}(T) \; = \; \{2+t-t^2+\alpha(-2t-t^2) : \alpha\in\mathbb{R}\}.$$

e) Sim. Seja $R : V \to \mathbb{R}^4$ definida por $R(u) = u$; Então $(R\circ T)(p(t) = R(T(p(t))) \underset{\text{Def. de } R}{=} T(p(t))$.

3) Seja λ_1 e λ_2 os valores próprios de A (portanto A é diagonalizável) e S uma matriz tal que $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2) = SAS^{-1}$. Considere-se $C = [c_{ij}]$ definida por $C = SBS^{-1}$. Como $AB = BA$, temos:

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)\; C = SAS^{-1}C = SAS^{-1}SBS^{-1} = SABS^{-1} = SBAS^{-1} = SBS^{-1}SAS^{-1} = C\;\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2).$$

Ora, $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)\; C = C\;\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$ significa que $\lambda_i c_{ij} = c_{ij}\lambda_j$ para todos $i,j\in\{1,2\}$; o que implica que $c_{ij} = 0$ para $i\neq j$. Logo C é uma matriz diagonal e portanto B é diagonalizável.