RESOLUÇÃO DO TESTE 2 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: MEAer

1) a) $V_1 = \{(x, 3w, 2w, w) \in \mathbb{R}^4 : x, w \in \mathbb{R}\}$; como $(x, 3w, 2w, w) = x(1, 0, 0, 0) + w(0, 3, 2, 1)$ conclui-se que $\{(1, 0, 0, 0), (0, 3, 2, 1)\}$ é uma base para V_1

b) Sabemos que $\dim(V_1) = 2$ pelo quaisquer dois vectores (não colineares) de V_1 constituem uma base de V_1. Assim, $\{(1, 0, 0, 0), (4, 3, 2, 1)\}$ é uma base para V_1 e inclui o vector $(4, 3, 2, 1)$

c) É claro que $V_1 = \mathcal{N}(A)$ com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Por outro lado, $(x, y, z, w) \in V_2$ sse o sistema com matriz aumentada $\left[\begin{array}{c|c} 4 & x \\ 3 & y \\ 2 & z \\ 1 & w \end{array}\right]$ for possível. Aplicando o método de eliminação de Gauss temos

$$\left[\begin{array}{c|c} 4 & x \\ 3 & y \\ 2 & z \\ 1 & w \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{c|c} 1 & w \\ 3 & y \\ 2 & z \\ 4 & x \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-2L_1+L_3 \\ -4L_1+L_4}]{-3L_1+L_2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & w \\ 0 & y-3w \\ 0 & z-2w \\ 0 & x-4w \end{array}\right].$$

Portanto $V_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y - 3w = 0, z - 2w = 0, x - 4w = 0\}$, pelo que $V_2 = \mathcal{N}(B)$ onde $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

2) a) Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Então $p(t) \in V$ sse $a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 0$, logo

$$p(t) = (2a_1 - 4a_2) + a_1 t + a_2 t^2 = a_1(2 + t) + a_2(-4 + t^2)$$

pelo que $\{2 + t, -4 + t^2\}$ é uma base para V (e também de $V + V$ pois $V + V = V$).

b) As coordenadas de $6 + t - t^2$ nesta base são $(1, -1)$ pois é a solução de:

$$6 + t - t^2 = \alpha_1(2 + t) + \alpha_2(-4 + t^2).$$

3) $(\Longrightarrow)$ Vamos supor que A é invertível. Seja $\mathcal{B}_1 = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$ e $\mathcal{B}_2 = Bc$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$. Note que $\mathcal{B}_1$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ pois A é invertível. É claro que $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = A$.

$(\Longleftarrow)$ Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de $\mathbb{R}^2$ tais que $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, portanto

$$u_1 = a_1 w_1 + a_2 w_2, \quad u_2 = b_1 w_1 + b_2 w_2 \qquad (*).$$

Vamos supôr que $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ é não invertível. Portanto existe[1] um vector não nulo $(c_1, c_2) \in \mathcal{N}(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2})$; logo,

$$a_1 c_1 + b_1 c_2 = 0, \;\; a_2 c_1 + b_2 c_2 = 0 \qquad (**).$$

Temos então que

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 \underset{(*)}{=} c_1(a_1 w_1 + a_2 w_2) + c_2(b_1 w_1 + b_2 w_2) = (a_1 c_1 + b_1 c_2) w_1 + (a_2 c_1 + b_2 c_2) w_2 \underset{(**)}{=} 0 w_1 + 0 w_2 = \mathbf{0}.$$

Portanto $c_1 u_1 + c_2 u_2 = \mathbf{0}$ o que contradiz o facto de $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ ser uma base pois $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$.

[1] Resolução alternativa: se A é não invertível, então as 2 colunas de A são colineares e usando (*) conclui-se que os vectores de u_1 e u_2 são colineares o que é contraditório.