Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2011/2012
15 de Outubro de 2012
Duração: 45 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 1 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: MEAer

1) Usando operações elementares temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\alpha L_1+L_3]{-L_1+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & \alpha-\alpha^2 & 0 & 1-\alpha \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & 0 & 1-\alpha \end{array}\right].$$

a) Assim, pelo método de eliminação de Gauss temos que:

- para $\alpha \neq -1$ o sistema é possível e indeterminado;
- para $\alpha = -1$ o sistema é impossível.

b) Para $\alpha = 0$ a matriz aumentada em escada de linhas é: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$. O sistema é possível e indeterminado e w é a variável livre; $z = 1, y = z = 1$ e $x = 1 - y = 0$. Portanto

$$\mathcal{S}_2 = \{(0,1,1,w) \in \mathbb{R}^4 : w \in \mathbb{R}\}.$$

c) Note que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Assim $(1,0,0,1) \in \mathcal{S}_\alpha$ se e só se $0 = 1 - \alpha$. Logo: $\alpha = 1$.

2) $$\det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 3ª coluna}}}{=} +2\det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 3ª coluna}}}{=} 2\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = 2(2-21) = -38.$$

a) $$(A^{-1})_{(1,2)} = \frac{(-1)^{2+1}}{\det(A)} (\operatorname{cof} A)_{(2,1)} = \frac{-1}{-38} \det(A_{21}) = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}}{38} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 1ª linha}}}{=} \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}{38} = \frac{-2}{38} = -\frac{1}{19}.$$

b) $\det(-AA^TA^{-1}) = (-1)^4 \det(AA^TA^{-1}) = \det(A)\det(A^T)\det(A^{-1}) = \det(A)\det(A)\frac{1}{\det(A)} = \det(A) = -38.$

c) $$\operatorname{adj}(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = -\frac{1}{38} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

3) Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta, a soma de colunas não altera o determinante da matriz; logo $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{bmatrix}$. Em seguida, somamos o simétrico dos blocos superiores $A+B \;\; B$ com os blocos inferiores $A+B \;\; A$ obtendo a matriz $\begin{bmatrix} A+B & B \\ \mathbf{O} & A-B \end{bmatrix}$ (isto é, $-L_1 + L_{n+1} \to L_{n+1},\ -L_2 + L_{n+2} \to L_{n+2}, \ldots,\ -L_n + L_{2n} \to L_{2n}$).

Portanto, $$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A+B & B \\ \mathbf{O} & A-B \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{ver, p.ex.,} \\ \text{aulas teóricas}}}{=} \det(A+B)\det(A-B).$$