RESOLUÇÃO DO TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: MEAer

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) Usando eliminação de Gauss temos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 2\alpha-1 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha+3 & 2\alpha-1 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_1+L_3]{-L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 2\alpha-2 \end{array}\right]$.

a) O sistema é determinado para $\alpha \neq \pm 1$. Para $\alpha = -1$ o sistema é impossível e para $\alpha = 1$ o sistema é indeterminado.

b) $\mathcal{S}_1 = \{(1-y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}$ pois para $\alpha=1$ a matriz aumentada, em escada de linhas é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

c) Não existe, pois $(1,-1,1) \in \mathcal{S}_\alpha \iff 1-\alpha+2 = 1 \wedge -(\alpha-1)+1 = 0 \wedge \alpha+1 = 2\alpha-2 \iff \alpha = 2 \wedge \alpha = 3$.

2) a) $\det(A) \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 3ª coluna}}}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 3ª coluna}}}{=} -3\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 1ª linha}}}{=} -3\left(\det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = -3^3$.

b) A invertível pois $\det(A) \neq 0$; $(A^{-1})_{(1,2)} = \frac{(-1)^{2+1}\det(A_{21})}{\det(A)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}}{3^3} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 1ª linha}}}{=} \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}}{3^3} = \frac{-9}{3^3} = -\frac{1}{3}$.

c) Note que $\det(3A^{-1}) = 3^5\det(A^{-1}) = \frac{3^5}{\det(A)} = \frac{3^5}{-3^3} = -9$ e $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ pelo que
$\det(3A^{-1})X(A^T)^{-1} + 11X(A^{-1})^T = I \iff -9X(A^T)^{-1} + 11X(A^T)^{-1} = I \iff X\left(\frac{1}{2}A^T\right)^{-1} = I \iff X = \frac{1}{2}A^T$.

3) a) i) O polinómio nulo $0 + 0t + 0t^2 \in \mathcal{V}$ porque $0 + 0t + 0t^2 = 0p_1 + 0p_2 + 0p_3$ e $(0,0,0) \in \mathcal{N}(A)$.
ii) Sejam $u, v \in \mathcal{V}$. Então existem $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathcal{N}(A)$ tais que $u = xp_1 + yp_2 + zp_3$ e $v = x'p_1 + y'p_2 + z'p_3$. Como $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço linear, $(x,y,z) + (x',y',z') \in \mathcal{N}(A)$, pelo que $u + v = (x+x')p_1 + (y+y')p_2 + (z+z')p_3 \in \mathcal{V}$.
iii) Dado α um escalar e $u = xp_1 + yp_2 + zp_3 \in \mathcal{V}$, então $\alpha u \in \mathcal{V}$ porque $\alpha u = (\alpha x)p_1 + (\alpha y)p_2 + (\alpha z)p_3$ e $(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in \mathcal{N}(A)$ pois $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço linear.
b) Sim: por exemplo $A = \mathbf{0}$ a matriz nula e $p_1(t) = 1, p_2(t) = t, p_3(t) = t^2$.
c) $\mathcal{N}(A) = \{(-y+2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$, pelo que $\{(-1,1,0), (2,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$. Mais, $\mathcal{V} = \{(-y+2z)p_1 + yp_2 + zp_3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-y+2z)(1+t+t^2) + y(1+t-2t^2) + z0 : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-3t^2) + z(2+2t+2t^2) : y, z \in \mathbb{R}\}$, pelo que $\{-3t^2, 2+2t+2t^2\}$ é uma base para $\mathcal{V}$.
d) Como $\dim(U) = 1$, existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2$ não nulo tal que $U = L(\{a+bt+ct^2\})$. Seja $p(t) = x + yt + zt^2 \in \mathcal{P}_2$. Então $p \in U$ sse existe α tal que $p(t) = \alpha(a+bt+ct^2)$ sse o sistema com matriz aumentada $\left[\begin{array}{c|c} a & x \\ b & y \\ c & z \end{array}\right]$ for possível. Ora usando eliminação de Gauss temos:

$$\left[\begin{array}{c|c} a & x \\ b & y \\ c & z \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{b}{a}L_1+L_2,\ -\frac{c}{a}L_1+L_3]{\text{se } a\neq 0} \left[\begin{array}{c|c} a & x \\ 0 & -\frac{b}{a}x+y \\ 0 & -\frac{c}{a}x+z \end{array}\right] \xrightarrow[aL_3\to L_3]{aL_2\to L_2} \left[\begin{array}{c|c} a & x \\ 0 & -bx+ay \\ 0 & -cx+az \end{array}\right]$$

pelo que $U = \{p(t) = x + yt + zt^2 \in \mathcal{P}_2 : bx + ay = 0, -cx + az = 0\}$ i.e. $U = \mathcal{V}$ onde $A = \begin{bmatrix} -b & a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$, $p_3(t) = t^2$. Note que se $a = 0$ então $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ porque $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Mais, se $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ podemo ser analogamente tratados usando a eliminição de Gauss, determinando outras matrizes A obedecendo as condições solicitadas.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) a) $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\left((1-\lambda)(2-\lambda)-2\right) = -\lambda^2(\lambda-3)$. Logo $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ são os valores próprios de A e $\mathrm{ma}(\lambda_1) = 2$, $\mathrm{ma}(\lambda_2) = 1$.

b) $E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(A-0I) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(A-3I) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.
Logo $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ é uma base para E_{λ_1} e $\{(1,0,2)\}$ é uma base para E_{λ_2}.

c) A matriz A é diagonalizável, porque $\mathrm{ma}(\lambda_1)$=$\mathrm{mg}(\lambda_1)$=2 e $\mathrm{ma}(\lambda_2)$=$\mathrm{mg}(\lambda_2)$=1. A matriz A não é ortogonalmente diagonalizável porque A não é simétrica.

2) a) Dado $u \in \mathcal{V}$ existe $(x,y,z) \in \mathcal{N}(A)$ tal que $u = xp_1 + yp_2 + zp_3$, por definição de $\mathcal{V}$; logo $\mathcal{C}(T) = \mathcal{V}$.

b) Por a) T é sobrejectiva. Provemos que T é injectiva. Ora $T(x,y,z) = 0$ significa que $xp_1+yp_2+zp_3 = 0$ o que implica $x = y = z = 0$ porque p_1, p_2, p_3 são linearmente independentes.

c) Já vimos em I-3c) que $\mathcal{B}_1 = \{(-1,1,0),(2,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{B}_2 = \{-3t^2, 2+2t+2t^2\}$ é uma base para $\mathcal{V}$. Como $T(-1,1,0) = -p_1+p_2 = -3t^2$ e $\mathrm{T}(2,,0,1) = 2p_1+p_3 = 2+2t+2t^2$,

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, T é bijectiva porque $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ é (quadrada e) invertível.

d) Por exemplo, seja $A = \mathbf{0}$ a matriz nula (portanto, $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^3$) e $p_1 = p_2 = p_3$ (portanto, $\mathcal{V} = L(\{p_1\})$).

3) a) U=$\mathcal{L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, pelo que $U^\perp$=$\mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ donde $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$ é um base para $U^\perp$. Portanto $U^\perp$=$\mathcal{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e U=$(U^\perp)^\perp$=$\mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, i.e. A=$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Note que $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ é uma base ortogonal de U (podemos aplicar o método de Gram-Schmidt a uma base de U) e $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$ é um base ortogonal para $U^\perp$, pelo que $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,-1,0,0),(0,0,1,-1\}$ é um base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ e contém uma base de U.

c) Por definição $d(p,U) = ||P_{U^\perp}(p)||$ e $d(p,U^\perp) = ||P_U(p)||$, pelo que o teorema de Pitágoras $||P_U(p)|||^2 + ||P_{U^\perp}(p)||^2 = ||p||^2$ diz-nos que: $d(p,U) = d(p,U^\perp)$ sse $2||P_U(p)||^2 = ||p||^2$. Como $||p||^2 = 2a^2+2b^2$ e

$$2||P_U(p)||^2 = 2||\frac{\langle p,(1,1,0,0)\rangle}{\langle(1,1,0,0),(1,1,0,0)\rangle}(1,1,0,0) + \frac{\langle p,(0,0,1,1)\rangle}{\langle(0,0,1,1),(0,0,1,1)\rangle}(0,0,1,1)||^2$$

$$= 2||\frac{1}{2}(a+b,a+b,a-b,a-b)||^2 = 2\ \frac{2(a+b)^2+2(a-b)^2}{4} = (a+b)^2+(a-b)^2 = 2a^2+2b^2$$

concluímos que $d(p,U) = d(p,U^\perp)$ para quaisquer $a,b \in \mathbb{R}$.

4) Como $\{u_1,u_2,u_3\}$ é uma base de U e $P_U(w) \in U$, existem escalares $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$:

$$P_U(w) = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3 \quad (*).$$

Por outro lado, $\langle u_i,w\rangle = \langle u_i,P_U(w)\rangle$ para cada $i \in \{1,2,3\}$ dado que $w = P_U(w)+P_{U^\perp}(w)$ e $\langle u_i,P_{U^\perp}(w)\rangle = 0$. Assim, o produto interno em $(*)$ com cada vector u_1,u_2 e u_3 dá originem ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_1\langle u_1,u_1\rangle + \alpha_2\langle u_1,u_2\rangle + \alpha_3\langle u_1,u_3\rangle = \langle u_1,w\rangle, \\ \alpha_1\langle u_2,u_1\rangle + \alpha_2\langle u_2,u_2\rangle + \alpha_3\langle u_2,u_3\rangle = \langle u_2,w\rangle, \\ \alpha_1\langle u_3,u_1\rangle + \alpha_2\langle u_2,u_2\rangle + \alpha_3\langle u_3,u_3\rangle = \langle u_3,w\rangle, \end{cases} \quad \text{matriz dos coeficientes das variáveis: } A=\begin{bmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle & \langle u_1,u_3\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle & \langle u_2,u_3\rangle \\ \langle u_3,u_1\rangle & \langle u_3,u_2\rangle & \langle u_3,u_3\rangle \end{bmatrix}$$

A matriz A dos coeficientes das variáveis deste sistema é a matriz de Gram relativa a $\{u_1,u_2,u_3\}$ que é invertível porque os vectores são linearmente independentes. Pela regra de Cramer temos:

$$\alpha_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} \langle u_1,w\rangle & \langle u_1,u_2\rangle & \langle u_1,u_3\rangle \\ \langle u_2,w\rangle & \langle u_2,u_2\rangle & \langle u_2,u_3\rangle \\ \langle u_3,w\rangle & \langle u_3,u_2\rangle & \langle u_3,u_3\rangle \end{bmatrix}}{\det(A)},\ \alpha_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,w\rangle & \langle u_1,u_3\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,w\rangle & \langle u_2,u_3\rangle \\ \langle u_3,u_1\rangle & \langle u_3,w\rangle & \langle u_3,u_3\rangle \end{bmatrix}}{\det(A)}, \alpha_3 = \frac{\det\begin{bmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle & \langle u_1,w\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle & \langle u_2,w\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_3,u_2\rangle & \langle u_3,w\rangle \end{bmatrix}}{\det(A)}.$$