Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2012/2013
16 de Janeiro de 2013
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: MEAer

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $\mathcal{S}_\alpha$ o conjunto solução do sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 2\alpha - 1 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha + 3 & 2\alpha - 1 \end{array}\right].$$

a) (1.0) Discuta em termos de α a existência ou não de solucão do sistema de equações lineares anterior.
b) (1.0) Para $\alpha = 1$, determine o conjunto solução do sistema de equações lineares correspondente.
c) (1.0) Caso exista, determine α tal que $(1, -1, 1) \in \mathcal{S}_\alpha$.

2) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) Calcule $\det(A)$.
b) (1.0) Justifique que A é invertível e determine a entrada $(1, 2)$ de A^{-1}.
c) (1.0) Resolva a equação matricial: $\det(3A^{-1})X(A^T)^{-1} + 11X(A^{-1})^T = I$.

3) Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e polinómios $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_2$ considere o conjunto:

$$\mathcal{V} = \{xp_1 + yp_2 + zp_3 \in \mathcal{P}_2 : \ (x, y, z) \in \mathcal{N}(A)\}.$$

a) (1.0) Prove que $\mathcal{V}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_2$.
b) (1.0) Verifique se existe alguma matriz A e polinómios p_1, p_2, p_3 tais que $\mathcal{P}_2 = \mathcal{V}$.
c) (1.0) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = 1 + t - 2t^2$, $p_3(t) = 0$.
Determine bases para $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{V}$.
d) (1.0) Seja U um subespaço linear de $\mathcal{P}_2$ de dimensão 1. Determine uma matriz A e polinómios p_1, p_2, p_3 tais que $U = \mathcal{V}$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) Determine os valores próprios de A, indicando as multiplicidades algébricas.
b) (1.0) Determine bases para cada espaço próprio de A.
c) (1.0) Será A diagonalizável ou ortogonalmente diagonalizável?

2) Sejam $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_2$. Considere ainda o subespaço linear de $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{V} = \{xp_1 + yp_2 + zp_3 \in \mathcal{P}_2 : \ (x, y, z) \in \mathcal{N}(A)\}$$

e a transformação linear $T : \mathcal{N}(A) \to \mathcal{V}$ definida por $T((x, y, z)) = xp_1 + yp_2 + zp_3$.

a) (1.0) Determine o contradomínio $\mathcal{C}(T)$ de T.
b) (1.0) Prove que se p_1, p_2, p_3 forem linearmente independentes, então $\mathcal{N}(A) \cong \mathcal{V}$.
c) (1.0) Sejam $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $p_1(t)=1+t+t^2$, $p_2(t)=1+t-2t^2$, $p_3(t)=0$.
Determine a representação matricial de T em bases (de $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{V}$) à sua escolha. Será T bijectiva?
d) (0.5) Verifique se existe alguma matriz A e polinómios p_1, p_2, p_3 tais que T não seja injectiva.

3) Considere $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e $U = L(\{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1\})$.

a) (1.0) Determine uma matriz A tal que $U = \mathcal{N}(A)$.
b) (1.0) Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de U.
c) (1.0) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, seja $p = (a, b, a, -b) \in \mathbb{R}^4$. Verifique se $d(p, U) = d(p, U^\perp)$.

4) (0.5) Seja $U = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ um subespaço linear do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ de dimensão 3 e A a matriz 3×3 de Gram relativa a $\{u_1, u_2, u_3\}$ (a entrada (i, j) de A é dada por $\langle u_i, u_j\rangle$). Para $w \in \mathbb{R}^n$ e $j \in \{1, 2, 3\}$, seja A_j a matriz obtida de A substituindo a coluna j de A pela matriz coluna $[\langle u_1, w\rangle \ \langle u_2, w\rangle \ \langle u_3, w\rangle]^T$. Sendo P_U a projecção ortogonal sobre U, prove que

$$P_U(w) = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}\, u_1 + \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\, u_2 + \frac{\det(A_3)}{\det(A)}\, u_3.$$

FIM