Ano Lectivo 2011/2012
7 de Janeiro de 2012
Duração: 90 minutos

TESTE 3 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, MEBiom, MEFT

1) a) $p(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\big((4-\lambda)^2-1^2\big)=(3-\lambda)^2(5-\lambda)$, assim, os valores próprios de A são $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=5$ com ma(λ_1)=2 e ma(λ_2)=1.

b) Dado que $E_{\lambda_1}=\mathcal{N}(A-\lambda_1 I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$; $E_{\lambda_2}=\mathcal{N}(A-\lambda_2 I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right)$, $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$ é uma base para E_{λ_1} e $\{(1,1,0)\}$ é uma base para E_{λ_2}.

c) A matriz A é ortogonalmente diagonalizável porque A é real e simétrica. As colunas de Q^T são uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A: $\{(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0),(0,0,1)\}$ é uma base o.n. para E_{λ_1} e $\{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)\}$ é uma base o.n. para E_{λ_2}. Portanto, $Q^T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $Q=(Q^T)^T$.

d) $\dim(\mathcal{N}(A^7-5I))=0$, uma vez que 5 não é valor próprio de A^7 (os valores próprios de A^7 são $\{3^7,3^7,5^7\}$).

2) a) $T(1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $T(t)=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $T(t^2)=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow A{:=}M(T;B_1;B_2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

b) Car(A)=2, pelo que $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para $\mathcal{I}(T)$. A transformação linear T não é injectiva pois $\dim(\mathcal{N}(A))=1\neq 0$.

c) O sistema $A\mathbf{x}=[3\ \ -5\ \ -3\ \ \ 5]^T$ tem conjunto solução $\{(3,-4-2c,c) : c\in\mathbb{R}\}$.
Logo, $\{3+(-4-2c)t+ct^2 : c\in\mathbb{R}\}$ é o conjunto solução da equação $T(p(t))=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

3) a) $\{(1,1,3),(-1,0,1)\}$ é uma base para $U^\perp$ e $d((9,0,9),U)=||P_{U^\perp}(9,0,9)||=||(9,0,9)-P_U(9,0,9)||$.
Ora $\{(1,-4,1)\}$ é uma base de U e $P_U(9,0,9)=\frac{\langle(9,0,9),(1,-4,1)\rangle}{\langle(1,-4,1),(1,-4,1)\rangle}(1,-4,1)=\frac{18}{18}(1,-4,1)$.
Portanto $d((9,0,9),U)=||(8,4,8)||=\sqrt{144}=12$.

b) Dado que $\{e=(1,-4,1)\}$ é uma base de U e que $\langle(1,-4,1),(1,-4,1)\rangle=36$, temos

$$\langle u,v\rangle=\alpha A\beta, \qquad \text{onde} \quad A=[36],\ u=\alpha e,\ v=\beta e \quad \text{e} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

A matriz A é claramente simétrica e $\sigma_A\subseteq\mathbb{R}^+$. Logo a aplicação define um produto interno em U

4) a) Como A é simétrica existe uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ tais que $A=Q^TDQ$, onde $\lambda_1,...,\lambda_n$ são os valores próprios de A. Mais, como $\sigma_A\subseteq\mathbb{R}^+$ existe uma matriz diagonal D_1 tal que $D_1^2=D$ (considerando $D_1=\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n})$). Seja $S=D_1Q$. Claro que S é invertível e $A=S^TS$. Consequentemente,

$$\langle u,v\rangle_A=\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}(S^TS)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}S^T\right) I \left(S\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right)=\langle Su,Sv\rangle_I.$$

b) Tem-se $\langle u,A^{-1}B^TAv\rangle_A=\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}A(A^{-1}B^TA)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}(AA^{-1})B^TA\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=$

$$=\left(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}B^T\right)A\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\langle Bu,v\rangle_A.$$