Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2011/2012
7 de Janeiro de 2012
Duração: 90 minutos

TESTE 3 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, MEBiom, MEFT

1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Calcule os valores próprios de A.
b) (1.0) Determine uma base para cada espaço próprio de A.
c) (1.0) Justifique que A é ortogonalmente diagonalizável. Determine uma matriz diagonal D e uma matriz ortogonal Q tais que $D = QAQ^T$.
d) (1.0) Calcule $\dim(\mathcal{N}(A^7 - 5I))$.

2) Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$p(t) \mapsto \begin{bmatrix} p(0) & p(2) \\ -p(0) & -p(2) \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Determine $M(T; B_1; B_2)$ onde B_1 e B_2 são as bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, respectivamente.
b) (1.0) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$ de T e diga, justificando, se T é injectiva.
c) (1.0) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p(t)) = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

3) Considere o subespaço linear $U=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \ -x_1 + x_3 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
a) (1.0) Usando o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, determine uma base para $U^\perp$ e calcule a distância entre $(9, 0, 9)$ e U.
b) (1.0) Verifique se a aplicação

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

define um produto interno em U.

4) Para cada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica e $\sigma_A \subseteq \mathbb{R}^+$, considere o produto interno $\langle u, v\rangle_A$ em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\langle u, v\rangle_A := \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \text{onde } u = (x_1, ..., x_n), \ v = (y_1, ..., y_n).$$

Em particular, $\langle u, v\rangle_I$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

a) (0.5) Para cada A, prove que existe uma matriz invertível S tal que $\langle u, v\rangle_A = \langle Su, Sv\rangle_I$.
b) (0.5) Prove que $\langle Bu, v\rangle_A = \langle u, A^{-1}B^TAv\rangle_A$, para qualquer $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

FIM