Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2011/2012
29 de Novembro de 2011
Duração: 45 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 2 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, MEBiom, MEFT

1) Usando operações elementares temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[2L_1+L_2]{-L_1+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

a) Assim, $\mathrm{car}(A) = 2$, logo $\dim\mathcal{N}(A) = 3 - 2 = 1$. Mais

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(U) = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, -3y = 0\},$$

pelo que $\{(0,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.
b) Seja $V := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x + y = 0,\ w = 0\}$. Notemos que $\{(1,-2,1,0),(0,0,-3,0)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$. Como $\mathcal{C}(A)$ e V são subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$ com a mesma dimensão (igual a 2), a igualdade $\mathcal{C}(A) = V$ fica demonstrada verificando que $(1,-2,1,0),(0,0,-3,0) \in V$.

2) Seja $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Então $v = a(1, 0) + b(0, 1)$, pelo que

$$S_{B_2 \to B_1} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Mas

$$S_{B_2 \to B_1} = (S_{B_2 \to B_1})^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

pelo que $a = 1, b = 0$, i.e. $v = (1, 0)$.

3) Claro que $V + V = V$ e $V = \mathcal{C}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (as colunas de A são os vectores que geram V), pelo que $\dim(V) = \mathrm{car}(A)$. Usando operações elementares, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1+L_2]{-L_1+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\dim(V + V) = 2$.

4) a) $u \in \mathcal{N}(A^p) \implies A^p u = 0 \Longrightarrow A(A^p u) = A0 \implies A^{p+1}u = 0 \implies u \in \mathcal{N}(A^{p+1})$.

b) Note-se que $\dim\ (\mathcal{N}(A^p)) = n - \mathrm{car}(A^p) \leq n$, i.e.

$$\dim(\mathcal{N}(A^p)) \leq n \qquad\qquad (*)$$

para qualquer p. Se não existir nenhum s tal que $\mathcal{N}(A^s) = \mathcal{N}(A^{s+1})$, então temos uma contradição usando a alínea a) e (*), pois teríamos

$$\dim(\mathcal{N}(A)) < ... < \dim(\mathcal{N}(A^p)) < \dim(\mathcal{N}(A^{p+1})) < \dim(\mathcal{N}(A^{p+2})) < ...$$

para todo o p (em particular, podemos encontrar r tal que $n < \dim\ \mathcal{N}(A^r)$).