Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2011/2012
29 de Novembro de 2011
Duração: 45 minutos

2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, MEBiom, MEFT

1) Considere a matriz 4×3 dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Calcule $\dim(\mathcal{N}(A))$ e determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

b) (1.0) Prove que $\mathcal{C}(A) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x+y=0, \ w=0\}$.

2) (1.0) Considere a base canónica $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, B_2 outra base de $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz mudança de base $S_{B_1 \to B_2}$ de B_1 para B_2 seja

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Calcule o vector $v \in \mathbb{R}^2$, sabendo que as coordenadas v_{B_2} do vector v em B_2 são $v_{B_2} = \big(\cos(\theta), \ \text{sen}(\theta)\big)$.

3) (1.0) Seja $V = L(\{(1,1,1),(3,0,-1),(-1,2,3)\})$. Calcule $\dim(V+V)$.

4) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) (0.5) Prove que $\mathcal{N}(A^p) \subseteq \mathcal{N}(A^{p+1})$, para todo o $p \in \mathbb{N}$.

b) (0.5) Prove que $\mathcal{N}(A^s) = \mathcal{N}(A^{s+1})$, para algum $s \in \mathbb{N}$.

FIM