Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2011/2012
24 de Outubro de 2011
Duração: 45 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 1 DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, MEBiom, MEFT

1) Usando operações elementares temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 3 \\ 1 & \beta-3 & 2\alpha & \alpha+3 \\ 1 & 0 & 2\alpha & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_1+L_2]{-L_1+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 3 \\ 0 & \beta-3 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{array}\right].$$

a) Assim, pelo método de eliminação de Gauss temos que:

- para $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 3$ o sistema é possível e determinado;
- para $\alpha = 0$ o sistema é impossível (para todo o β) e
- para $\beta = 3$ o sistema é impossível para $\alpha \neq 1$ e indeterminado para $\alpha = 1$.

b) Para $\alpha = 1$ e $\beta = 3$ a matriz aumentada em escada de linhas é: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. O sistema é possível e indeterminado e podemos escolher a variável y para variável livre. Assim, o conjunto solução é

$$S = \{(2, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}.$$

2) $A = I + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Usando, p.ex., o método de Gauss-Jordan temos $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3)
$$\det(2A - A^T) = \det \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{=}_{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 4ª linha}}} +\det \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{=}_{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 3ª linha}}} -2\det \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= -2(0-8) = 16.$$

4) Sejam $u = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}$. Pelo que $uv^T = [\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n] = vu^T$.

a) Vamos calcular (de duas formas diferentes) o determinante da matriz do tipo $(n+1) \times (n+1)$ definida por $A := \begin{bmatrix} I & u^T \\ -v & 1 \end{bmatrix}$, onde I designa a matriz identidade $n \times n$. Usando operações elementares temos:

$$\begin{bmatrix} I & u^T \\ -v & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\cdots,\ \beta_n L_n + L_{n+1}]{\beta_1 L_1 + L_{n+1},\ \beta_2 L_2 + L_{n+1},} \begin{bmatrix} I & u^T \\ \mathbf{0} & 1 + uv^T \end{bmatrix} \qquad (*)$$

$$\begin{bmatrix} I & u^T \\ -v & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\cdots,\ -\alpha_1 L_{n+1} + L_1]{-\alpha_n L_{n+1} + L_n,\quad -\alpha_{n-1} L_{n+1} + L_{n-1},} \begin{bmatrix} I + u^T v & \mathbf{0} \\ -v & 1 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

Usando a fórmula de Laplace na linha $n+1$ em (*) temos: $\det(A) = 1 + \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = 1 + \det(uv^T)$.
Usando a fórmula de Laplace na coluna $n+1$ em (**) temos: $\det(A) = \det(I + u^T v)$.

b) Por a) temos $\det(I + u^T u) = 1 + \det(uu^T) = 1 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$, pelo que $I + u^T u$ é invertível.