Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2011/2012
28 de Janeiro de 2012
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LMAC, MEBiom, MEFT

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) Usando eliminação de Gauss temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & -7 \\ \alpha & 2\alpha & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\alpha L_1+L_4]{-3L_1+L_2,\ L_1+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 3-3\alpha & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

a) Logo o sistema é indeterminado para $\alpha = 1$ e é determinado $\alpha \neq 1$.
b) Para $\alpha = -1$, o sistema é possível e determinado e $S = \{(\frac{7}{2}, -\frac{7}{4}, 0)\}$.

2) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$ e $\lambda = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

a) $A^T A = \lambda I$.
b) Por a) sabemos que $\det(A)^2 = \det(A^T A) = \det(\lambda I) = \lambda^4$.; logo $\det(A) = \pm\lambda^2$. Por definição de determinante e de A, a^4 tem que ser uma parcela de $\det(A)$. Logo $\det(A) = +\lambda^2$.
c) $\det(A) \neq 0$ sse $A \neq \mathbf{0}$. Portanto $A \neq \mathbf{0}$ é sempre invertível, logo $\mathrm{car}(A^7) = 4$. Finalmente, temos

$$\det(\frac{1}{\det(A)} A^4) = (\frac{1}{\det(A)})^4 \det(A^4) = 1.$$

d) dim(V)= 4 e $\dim(\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})) = 16$, pelo que esse número mínimo é 12.

3) a) Pela eliminação de Gauss efectuada na questão 1), temos $U = \{(x, y, z) :\ x+2y+3z = 0, y+2z = 0\}$; logo $U = \{(z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Portanto $\{(1, -2, 1)\}$ é uma base para U.

b) Por exemplo $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

4) a) Claro que $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^2)$ porque $Au = 0$ implica $A^2 u = 0$. Como a dimensão do núcleo de uma matriz é igual ao número de colunas menos a característica dessa matriz, podemos dizer que $\dim\mathcal{N}(A)\dim\mathcal{N}(A^2)$ (usando a hipótese). Assim $\mathcal{N}(A)$ é um subsepsaço de $\mathcal{N}(A^2)$ com a mesma dimensão, portanto $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^2)$.

b) Seja $B = [c_1\ c_2\ \cdots c_n]$ onde $c_1, c_2, .., c_n$ são as colunas de $B \in E$. Assim $AB = \mathbf{0}$ pode ser descrita por n sistemas homogéneos $Ac_1 = 0$, $Ac_2 = 0$,..., $Ac_n = 0$. Cada um destes sistemas homogéneo tem dimensão $n - k$, pelo que $\dim(E) = (n - k)n$. Note que definindo $E_i = \{B \in E : B = [0\ \cdots\ b_i \cdots\ 0]\}$ $(i \in \{1, .., n\})$. Então temos $E_i \cap E_j = \{0\}$ se $i \neq j$ e $E_1 + E_2 + ... + E_n = E$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) a) $p(\lambda)=\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\big((2-\lambda)(2-\lambda)-4\big) = -\lambda^2(\lambda-4)$. Logo $\sigma_A=\{0,0,4\}$.

b) $E_0=\mathcal{N}(A-0I)=\mathcal{N}(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix})$ e $E_4=\mathcal{N}(A-4I)=\mathcal{N}(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix})$.
Logo $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ é uma base para E_0 e $\{(1,0,1)\}$ é uma base para E_4. A matriz A é diagonalizável, porque ma(0)=mg(0)=2 e ma(4)=mg(4)=1.

c) $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ é uma base para V, logo $V=\mathcal{L}(B)$ com $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto $V^\perp=\mathcal{N}(B)$.

d) $\{(1,1,-1)\}$ é uma base para $V^\perp$; mais $(1,1,-1)\in E_0$ e $(1,1,-1)\notin E_4$. Portanto $V^\perp\subseteq E_\lambda$ sse $\lambda=0$.

e) Como $17\notin\sigma_A$, $A+17I$ é invertível, pelo que $\mathcal{L}(A+17I)^\perp=\{(0,0,0)\}$. Logo

$$d((4,4,4),\mathcal{L}(A+17I)^\perp)=||P_{\mathcal{L}(A+17I)}(4,4,4)||=||(4,4,4)||=4\sqrt{3}.$$

2) Sejam $v_1=(1,0,0),\ v_2=(1,1,0), v_3=(1,1,1)$ e $p_1(t)=1+t,\ p_2(t)=1-t$.

a) Dado que $(5,1,1)=4v_1+0v_2+1v_3$,

$$\begin{aligned} T(5,1,1) &= 4T(v_1)+0T(v_2)+1T(v_3)=4(1p_1(t)-1p_2(t))+(0,0,0)+1(-1p_1(t)+1p_2(t)) \\ &= 3p_1(t)-3p_2(t)=3(1+t)-3(1-t)=6t. \end{aligned}$$

b) Caso exista, seja $B=M(R;B_2;B_1)$; tem-se $\mathcal{C}(AB)\subseteq\mathcal{C}(A)$ pelo que $\text{car}(AB)\le\text{car}(A)=1$. Por outro lado $AB=I$ implica $\text{car}(AB)=\text{car}(I)=2$ o que é contraditório. Portanto não existe nenhuma transformação linear R nessas condições.

c) $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$; como $-1v_1+1v_2+0v_3=(0,1,0)$ e $1v_1+0v_2+1v_3=(2,1,1)$, concluímos que $\{(0,1,0),(2,1,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$. T não é sobrejectiva pois $\dim(\mathcal{C}(A))=1\neq 2$.

d) É claro que $p(t)=\frac{1}{2}p_1(t)-\frac{1}{2}p_2(t)$. Mais o conjunto solução do sistema $A\mathbf{x}=[\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}]^T$ é $\{(\frac{1}{2}-y+z,y,z)\in\mathbb{R}^3: y,z\in\mathbb{R}\}$. Portanto o conjunto solução de $T(x,y,z)=p(t)$ é $\{(\frac{1}{2}-y+z)v_1+yv_2+zv_3: y,z\in\mathbb{R}\}$, i.e.

$$\{(\frac{1}{2}+2z,y+z,z)\in\mathbb{R}^3:\ y,z\in\mathbb{R}\}.$$

3) a) Claro que $\langle u+\alpha v,w\rangle_A=\langle u,w\rangle_A+\alpha\langle v,w\rangle_A$ para todos $u,v,w\in\mathbb{R}^n$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, e como a matriz A é simétrica $\langle u,v\rangle_A=\langle v,u\rangle_A$. Falta provar a positividade. Dado $u\in V$ existem escalares $\alpha_1,...,\alpha_r$ e vectores $v_1\in E_{\lambda_1},...,v_r\in E_{\lambda_r}$ tais que $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_rv_r$ (sem perda de generalidade podemos assumir que os valores próprios $\lambda_1,...\lambda_r$ são todos deferentes). Note que como $A=A^T$, vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais (no produto interno usual) Assim

$$\langle u,u\rangle_A=\alpha_1^2\lambda_1||v_1||_I^2+....+\alpha_r^2\lambda_r||v_r||_I^2$$

onde $||v_i||_I$ designa a norma de v_i no produto interno usual. Logo $\langle u,u\rangle_A\ge 0$ e se $\langle u,u\rangle_A=0$ então $u=0$ (porque $\lambda_i>0$ para cada $i\in\{1,...,r\}$).

b) Seja $B=\begin{bmatrix} - & b_1 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & b_n & - \end{bmatrix}$ onde b_i é a linha i de B (com $i\in\{1,...,n\}$). Assim $U^\perp=\{v\in\mathbb{R}^n:\langle b_1,u\rangle_A=0,...,\langle b_n,u\rangle_A=0\}$. Ora $\langle b_i,u\rangle_A=\begin{bmatrix} - & b_i & - \end{bmatrix}\ A\begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}$, isto é,

$$v\in U^\perp\ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix} - & b_1 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & b_n & - \end{bmatrix}\ A\begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto definindo $C:=BA$ temos o pretendido $U^\perp=\mathcal{N}(BA)$.