Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2011/2012
28 de Janeiro de 2012
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LMAC, MEBiom, MEFT

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é dado por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & -7 \\ \alpha & 2\alpha & 3 & 0 \end{array}\right].$$

a) (1.0) Discuta em termos de α a existência ou não de solução do sistema de equações lineares anterior.

b) (1.0) Para $\alpha = -1$, determine o conjunto solução do sistema de equações lineares correspondente.

2) Considere o conjunto de matrizes $\mathrm{V}= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} : \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$.

a) (1.0) Verifique que A^TA é uma matriz diagonal, para cada $A \in \mathrm{V}$.

b) (1.0) Calcule $\det(A)$, para cada $A \in \mathrm{V}$.

c) (1.0) Calcule a característica de A^7 e $\det(\frac{1}{\det(A)}A^4)$ para cada $A \in \mathrm{V}\setminus\{\mathbf{0}\}$.

d) (1.0) Determine o número mínimo de equações lineares homogéneas que definam V enquanto subespaço linear de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

3) Considere o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+2y+3z=0, 3x+2y+z=0, -x+2y+5z=0\}.$$

a) (1.0) Determine uma base para U e a respectiva dimensão.

b) (1.0) Verifique se existe uma matriz simétrica Q tal que $U = \mathcal{C}(Q)$.

4) a) (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A^2)$. Prove que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^2)$.

b) (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{car}(A) = k$ e seja $E = \{B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : AB = \mathbf{0}\}$. Calcule $\dim(E)$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual, o subespaço linear V de $\mathbb{R}^3$ e a matriz A definidos, respectivamente, por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y - z = 0\}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Calcule os os valores próprios de A.

b) (1.0) Verifique se A é diagonalizável.

c) (1.0) Encontre uma matriz B tal que $V^{\perp} = \mathcal{N}(B)$.

d) (1.0) Verifique se existe um valor próprio λ de A tal que $V^{\perp} \subseteq E_{\lambda}$.

e) (1.0) Calcule a distância entre $(4, 4, 4)$ e $\big(\mathcal{L}(A + 17\, I)\big)^{\perp}$.

2) Considere as seguintes bases ordenadas: $B_1 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $B_2 = \{1 + t, \; 1 - t\}$ de $\mathcal{P}_1$, onde $\mathcal{P}_1$ é o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1 na variável t. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_1$ a transformação linear cuja representação matricial em relação às bases B_1 e B_2 é:

$$A = M(T; B_1; B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Calcule $T(5, 1, 1)$.

b) (1.0) Verifique, justificando, se existe uma transformação linear $R : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T \circ R = I$.

c) (1.0) Determine uma base para o núcleo de T e verifique se T é sobrejectiva.

d) (1.0) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x, y, z) = p(t)$, onde $p(t) = t$.

3) Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica, considere a aplicação dada por

$$\langle u, v\rangle_A := \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \text{onde } u = (x_1, ..., x_n), \; v = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

a) (0.5) Suponha que $\lambda_1, ..., \lambda_r$ são valores próprios de A positivos e considere $V = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda_r}$. Prove que $\langle u, v\rangle_A$ define um produto interno em V.

b) (0.5) Suponha que $\sigma_A \subseteq \mathbb{R}^+$ e considere $\mathbb{R}^n$ munido com o produto interno $\langle u, v\rangle_A$. Seja $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e defina $U = \mathcal{L}(B)$. Construa uma matriz C tal que $U^{\perp} = \mathcal{N}(C)$.