Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
8 de Janeiro de 2011
Duração: 90 minutos

3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

1) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A.

a) (1.0) Determine os valores próprios de A e diga, justificando, se A é invertível.

b) (1.0) Determine, caso exista, uma base para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.

c) (1.0) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $(\mathcal{C}(A))^\perp$ (complemento ortogonal de $\mathcal{C}(A)$).

d) (1.0) Calcule a distância entre $(1,1,0)$ e $\mathcal{L}(A)$.

e) (1.0) Determine uma matriz B tal que $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{N}(B)$ (o complemento ortogonal de $\mathcal{N}(A)$ é igual ao núcleo de B).

2) Seja $\mathcal{P}_n$, com $n \in \mathbb{N}$, o espaço linear real dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n. Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, 1+2t\}$ de $\mathcal{P}_1$, é dada pela matriz:

$$M(T_1; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ tal que

$$T_2(1) = 1 - t \qquad\qquad T_2(t) = 2 + 8t - 2t^2.$$

a) (1.0) Determine a matriz $M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_1)$ que representa T_2 em relação às bases ordenadas $\mathcal{B} = \{1, t\}$ de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

b) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(T_1)$ (núcleo de T_1) e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

c) (1.0) Determine $T_1(t)$ e encontre, em $\mathcal{P}_2$, a solução geral da equação $T_1(p(t)) = t$.

d) (1.0) Verifique se 1 é o único valor próprio de $T_1 \circ T_2$.

3) (1.0) Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma transformação linear. Mostre que existe um e um só $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(u) = \langle u, u_0 \rangle$, para todo o $u \in \mathbb{R}^n$.