Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º Semestre 2010/2011
28 de Maio de 2011
Duração: 90 minutos

3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Para cada α real, considere a matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Prove que $(4, 1+\alpha, -4)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.

b) (1.0) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

c) (1.0) Determine uma base para cada espaço próprio de A e identifique os valores de α para os quais A é diagonalizável.

d) (1.0) Determine, se existirem, os valores de α para os quais é possível encontrar uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A. Justifique.

e) (1.0) Considerando a matriz A para $\alpha = -1$, calcule a distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A+I)$.

2) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ de $\mathcal{P}_2$ onde $p_1(t) = 1 + 2t + 3t^2$, $p_2(t) = 2 + 3t$, $p_3(t) = 1$. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por:

$$T(p_1(t)) = p_2(t), \qquad T(p_2(t)) = p_3(t), \qquad T(p_3(t)) = 0.$$

a) (1.0) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T na base $\mathcal{B}$.

b) (1.0) Calcule $T^3(p(t))$, para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.

c) (1.0) Determine uma base para o núcleo de T e uma base para o contradomínio de T.

d) (1.0) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p(t)) = 3 + 3t$.

3) (1.0) Considere o espaço linear $\mathbb{R}^n$ munido com o produto interno usual. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^TA = AA^T$. Prove que o complemento ortogonal do espaço das colunas de A é igual ao núcleo de A, isto é

$$\Big(\mathcal{C}(A)\Big)^{\perp} = \mathcal{N}(A).$$