2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) Considere a matriz dada por: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) Determine, justificando, a dimensão do núcleo de A.

b) (0.5) Diga, justificando, se $\{(1,0,0,0)\}$ é uma base do espaço das colunas de A.

2) Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \; x+y+z+w = 0\}$.

a) (1.0) Determine uma base para U.

b) (0.5) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1,-1,-1,1)$ e $(-1,0,0,1)$.

3) (1.0) Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases ordenadas $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ em que $\mathcal{B}_1 = \{(1,-1),(0,1)\}$. Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Determine as coordenadas do vector $(1,1)$ em $\mathcal{B}_2$.

4) (0.5) Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere os seguintes subespaços lineares de $\mathcal{P}_2$:

$$V_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \; p(-1) = 2p(0) - p(1)\} \qquad \text{e} \qquad V_2 = L(\{-1+t, 1-t^2\}).$$

Determine um base para $V_1 \cap V_2$.

5) (0.5) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^3 \neq \mathbf{0}$ e $A^4 = \mathbf{0}$. Seja $v \notin \mathcal{N}(A^3)$. Prove que o conjunto

$$\{v, Av, A^2v, A^3v\}$$

é linearmente independente.