Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (19/OUTUBRO/2010)
LEAN, LEMat, MEQ Duração: 45m

Nome do Aluno:____

Número de Aluno:__________________________________**Curso:**________________

Advertência: há 5 enunciados parecidos.... mas distintos

1) Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é dado por $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & 2 & 20 \\ 1 & 5 & \alpha & 10 \end{array}\right]$.

a) (1.0) Discuta em termos de α a existência ou não de solução do sistema de equações lineares anterior.
b) (1.0) Para $\alpha = 4$, determine o conjunto solução do sistema de equações lineares correspondente.
Resolução: Usando o método de eliminação de Gauss, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & 2 & 20 \\ 1 & 5 & \alpha & 10 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \\ -L_1+L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & 0 \end{array}\right].$$

a) Portanto para $\alpha \neq 4$ o sistema é possível e determinada. Para $\alpha = 4$ o sistema é possível e indeterminado e o grau de indeterminação é igual a 1 (= número de incógnitas - car(A)).
b) o conjundo solução do sistema para $\alpha = 4$ é:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 4y + 2z = 10, \ -y - 2z = 0\} = \{(6z + 10, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z \in \mathbb{R}\},$$

escolhendo z para incógnita livre.

2) (1.0) Determine a matriz A tal que $(A^T + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.
Resolução: Usando a regra de Gauss-Jordan podemos facilmente concluir que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ora $(A^T + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow (A^T + 4I) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$, pelo que

$$A^T = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Conclusão: $A = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$.

3) (1.0) Sejam A e B matrizes 3×3 tais que $\det(A) = \sqrt{3}$ e $\det(B) = \frac{1}{2}$. Calcule $\det(2A^TB^{-3})$.
Resolução: Usando as propriedades do determinantes temos

$$\det(2A^TB^{-3}) = 2^3 \det(A^TB^{-3}) = 2^3 \det(A^T) \det(B^{-3}) = 2^3 \det(A) \frac{1}{\det(B^3)} =$$

$$= 2^3 \det(A) \frac{1}{\det(B)^3} = 2^3\sqrt{3}\frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = 64\sqrt{3}.$$

4) (0.5) Calcule $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & -2 \\ \pi & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução: Usando a fórmula de Laplace na 3^a coluna de A, temos que

$$\det(A) = +1 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = 2(18-3) = 30,$$

onde na segunda igualdade, usou-se novamente a fórmula de Laplace na 3^a coluna.

5) (0.5) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ matrizes não nulas. Determine a característica de AB^T, justificando.

Resolução: Sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Então

$$AB^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_ib_1 & a_ib_2 & \cdots & a_ib_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Seja $i \in \{1, ..., n\}$ o menor número tal que $a_i \neq 0$ (tal i existe porque $A \neq 0$). Aplicamos agora a operação elementar

$$-\frac{a_j}{a_i} L_i + L_j \longrightarrow L_j$$

para todo o $j \in \{1, ..., n\}$, $j \neq i$. Em seguida: multiplicamos a linha i por $\frac{1}{a_i}$ e trocamos a linha 1 e a linha i ($L_1 \longleftrightarrow L_i$), podemos assim concluir que, usando operações elementares, a matriz AB^T transformar-se na matriz:

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ora como $B \neq 0$, conclui-se que a primeira linha desta matriz é não nula (e é a única!), pelo que $\text{car}(AB^T) = 1$.