Resolução do 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (8 de Janeiro de 2011)
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

1) a) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=(1-\lambda)\,\lambda\,(2-\lambda)$. Logo, os valores próprios de A são 1, 0 e 2. Como 0 é valor próprio de A então A não é invertível.

b) Como A tem 3 valores próprios distintos, qualquer conjunto de 3 vectores próprios associados respectivamente a cada um desses valores próprios, será linearmente independente, pelo que existirá uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Uma tal poderá ser $\{(1,0,-1),(0,1,0),(1,2,1)\}$ uma vez que os subespaços próprios associados aos valores próprios 1, 0 e 2 são respectivamente dados por:

$$\mathcal{N}(A-I)=L(\{(0,1,0)\}),\ \mathcal{N}(A)=L(\{(-1,0,1)\}),\ \mathcal{N}(A-2I)=L(\{(1,2,1)\}).$$

c) $(1,0,1)=(1,1,1)-(0,1,0)$ então $(1,0,1),(0,1,0)\in\mathcal{C}(A)$. Além disso $\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle=0$. Por outro lado, como $(\mathcal{C}(A))^{\perp}=\left(\mathcal{L}\left(A^T\right)\right)^{\perp}=\mathcal{N}\left(A^T\right)=L(\{(-1,0,1)\})$ e portanto uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $(\mathcal{C}(A))^{\perp}$ poderá ser: $\{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$.

d) A distância d entre $(1,1,0)$ e $\mathcal{L}(A)$ é dada por: $d((1,1,0),\mathcal{L}(A))=\left\|P_{(\mathcal{L}(A))^{\perp}}(1,1,0)\right\|=$
$=\left\|P_{\mathcal{N}(A)}(1,1,0)\right\|=\left\|\operatorname{proj}_{(-1,0,1)}(1,1,0)\right\|=\left\|\frac{\langle(1,1,0),(-1,0,1)\rangle}{\|(-1,0,1)\|^2}(-1,0,1)\right\|=\left\|\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Como $(\mathcal{N}(A))^{\perp}=\mathcal{N}(B)\Leftrightarrow\mathcal{N}(A)=(\mathcal{N}(B))^{\perp}=\mathcal{L}(B)$ e $\mathcal{N}(A)=L(\{(-1,0,1)\})$ logo poderá ter-se $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

2) **a)** $T_2(1)=1-t=0\,(1+t)+1\,(1-t)+0t^2$, $T_2(t)=2+8t-2t^2=5\,(1+t)-3\,(1-t)-2t^2$, logo $M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_1)=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 1 & -3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

b) $\mathcal{N}(M(T_1;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2))=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\right)=\{(-2y,y,y):y\in\mathbb{R}\}$. Logo $\mathcal{N}(T_1)=$
$\{-2y\,(1+t)+y\,(1-t)+yt^2:y\in\mathbb{R}\}=\{y\,(-1-3t+t^2):y\in\mathbb{R}\}=L(\{-1-3t+t^2\})$. Base para $\mathcal{N}(T_1)$: $\{-1-3t+t^2\}$. T_1 é sobrejectiva: $\dim\mathcal{I}(T_1)=\dim\mathcal{P}_2-\dim\mathcal{N}(T_1)=2=\dim\mathcal{P}_1$.

c) $T_1(t)=\frac{1}{2}\left[T_1(1+t)-T_1(1-t)\right]=\frac{1}{2}\left[1\,(1+t)+0\,(1+2t)-2\,(1+t)+1\,(1+2t)\right]=\frac{1}{2}t\Leftrightarrow$ $T_1(2t)=t$ (uma vez que T_1 é linear), logo a solução geral da equação $T_1(p(t))=t$ é: $\{2t\}+\mathcal{N}(T_1)=\{2t+c\,(-1-3t+t^2):c\in\mathbb{R}\}$.

d) $\{1,t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$. Como $(T_1\circ T_2)(1)=T_1(T_2(1))=T_1(1-t)=2\,(1+t)-1\,(1+2t)=1$ e $(T_1\circ T_2)(t)=T_1(T_2(t))=T_1(2+8t-2t^2)=5T_1(1+t)-3T_1(1-t)-2T_1t^2=5\left[1\,(1+t)+0\,(1+2t)\right]-3\left[2\,(1+t)-(1+2t)\right]-2\left[0\,(1+t)+1\,(1+2t)\right]=t$, então $T_1\circ T_2=I$, ou seja, 1 é o único valor próprio de $T_1\circ T_2$.

3) **Existência**. Se $\mathcal{N}(T)=\mathbb{R}^n$ então $u_0=\mathbf{0}$. Se $\mathcal{N}(T)\neq\mathbb{R}^n$ então existe $v_0\in(\mathcal{N}(T))^{\perp}\setminus\{\mathbf{0}\}$. Seja $u\in\mathbb{R}^n$ arbitrário. Logo $T(u)v_0-T(v_0)u\in\mathcal{N}(T)$, pois

$$T\Big(T(u)v_0-T(v_0)u\Big)=T(u)T(v_0)-T(v_0)T(u)=0.$$

Deste modo $\langle T(u)v_0-T(v_0)u,v_0\rangle=0$ o que é equivalente a $T(u)=\langle u,\frac{T(v_0)}{\langle v_0,v_0\rangle}\ v_0\rangle$. Assim existe $u_0:=\frac{T(v_0)}{\langle v_0,v_0\rangle}\ v_0\in\mathbb{R}^n$ tal que $T(u)=\langle u,u_0\rangle$, para todo o $u\in\mathbb{R}^n$.
Unicidade. Suponhamos que existem $u_0,u_1\in\mathbb{R}^n$ tais que $\langle u,u_0\rangle=T(u)=\langle u,u_1\rangle$, para todo o $u\in\mathbb{R}^n$. Assim $\langle u,u_0-u_1\rangle=0$, para todo o $u\in\mathbb{R}^n$, isto é $u_0-u_1\in(\mathbb{R}^n)^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$, ou seja $u_0=u_1$.