Resolução do 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1+\alpha \\ -4 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 1+\alpha \\ -4 \end{bmatrix}$, logo $(4, 1+\alpha, -4)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio -1.

b) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & \alpha \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 4\right) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$, logo, os valores próprios de A são: 3 e -1 onde $m_a(3) = 2$ e $m_a(-1) = 1$ são as respectivas multiplicidades algébricas.

c) Espaços próprios de A: $\mathcal{N}(A - (-1)I)$ e $\mathcal{N}(A - 3I)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(A - (-1)I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & \alpha \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = L(\{(4, 1+\alpha, -4)\}).$$

O conjunto $\{(4, 1+\alpha, -4)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - (-1)I)$ pois gera $\mathcal{N}(A - (-1)I)$ e é linearmente independente.

$$\mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \alpha \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} L(\{(0,1,0)\}) & \text{se} \quad \alpha \neq 1 \\ \\ L(\{(0,1,0), (1,0,1)\}) & \text{se} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

O conjunto $\{(0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - 3I)$ se $\alpha \neq 1$. O conjunto $\{(0,1,0), (1,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - 3I)$ se $\alpha = 1$. A matriz A é diagonalizável se e só se existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A $(\{(4,2,-4), (0,1,0), (1,0,1)\})$ se e só se $\alpha = 1$.

d) Não há nenhum valor de α para o qual exista uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A, uma vez que A não é simétrica, isto é, $A \neq A^T$ para todo o α.

e) Para $\alpha = -1$, a distância entre o ponto $(1,1,1)$ e o subespaço $\mathcal{N}(A+I)$ é dada por:

$$d((1,1,1), \mathcal{N}(A+I)) = \left\| P_{(\mathcal{N}(A+I))^\perp}(1,1,1) \right\| = \left\| P_{\mathcal{L}(A+I)}(1,1,1) \right\| \underset{(1,1,1) \in \mathcal{L}(A+I)}{=} \|(1,1,1)\| = \sqrt{3}.$$

2) a) $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ uma vez que $T(p_1(t)) = p_2(t)$, $T(p_2(t)) = p_3(t)$, $T(p_3(t)) = 0$ e $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ é uma base ordenada de $\mathcal{P}_2$.

b) Atendendo a que $M(T^3; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sendo α, β e γ as coordenadas de $p(t)$ em $\mathcal{B}$ então as coordenadas de $T^3(p(t))$ em $\mathcal{B}$ são dadas por: $M(T^3; \mathcal{B}; \mathcal{B}) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Pelo que $T^3(p(t)) = \mathbf{0}$, para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.

c) Como $\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})) = L(\{(0,0,1)\})$, então $\mathcal{N}(T) = L(\{0p_1(t) + 0p_2(t) + 1p_3(t)\}) = L(\{p_3(t)\})$. O conjunto $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ pois gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente.

Quanto ao contradomínio, como $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ gera $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{I}(T) = L(\{T(p_1(t)), T(p_2(t)), T(p_3(t))\}) = L(\{p_2(t), p_3(t)\}) = L(\{2+3t, 1\}).$$

O conjunto $\{2+3t, 1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ pois gera $\mathcal{I}(T)$ e é linearmente independente.

d) Como $T(p(t)) = 3 + 3t = (2+3t) + 1 = T(p_1(t)) + T(p_2(t)) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(p_1(t) + p_2(t)) = T(3 + 5t + 3t^2)$, logo $3 + 5t + 3t^2$ é uma solução particular de $T(p(t)) = 3 + 3t$, pelo que a solução geral de $T(p(t)) = 3 + 3t$ é dada por:

$$3 + 5t + 3t^2 + \mathcal{N}(T) = \alpha + 3 + 5t + 3t^2 \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3) Por um lado, tem-se

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(AA^T) = \mathcal{N}(A^T)$$

onde se usou a hipótese $AA^T = A^T A$ na segunda igualdade. Por outro lado $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{L}(A^T)^\perp$ e $\mathcal{L}(A^T)^\perp = \mathcal{C}(A)$, donde podemos concluir que $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{C}(A)$.