Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (03/DEZEMBRO/2010)
LEAN, LEMat, MEQ Duração: 45m

Nome do Aluno:____

Número de Aluno:_______________________________________**Curso:**_________________

Advertência: há 6 enunciados parecidos.... mas distintos

1) Sejam $\mathcal{N}(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{C}(A)$, respectivamente, o núcleo, espaço das linhas e espaço das colunas de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.
b) (1.0) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua duas colunas de A.
c) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{L}(A) \bigcap \mathcal{C}(A)$.

Resolução: **a)** Usando o método de eliminação de Gauss, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto $\mathcal{N}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0,\ y - z = 0\} = \{(-z, z, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$. Logo $\{(-1, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$.

b) Os vectores $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ formam uma base de $\mathcal{C}(A)$. Queremos encontrar um vector (x, y, z) tal que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (x, y, z)\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$, e portanto linearmente independentes. Portanto queremos terminar (x, y, z) tal que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}$ seja invertível. Ora

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z - x \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - x - y \end{bmatrix} \qquad (*).$$

Pelo que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (x, y, z)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se $z - x - y \neq 0$.

Por exemplo $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém as duas primeiras colunas de A.

c) Verifique que $\dim\big(\mathcal{L}(A) + \mathcal{C}(A)\big) = 3$ e portanto $\dim \mathcal{L}(A) \bigcap \mathcal{C}(A) = 1$. Como a primeira linha e primeira coluna de A são iguais ao vector $(1, 0, 1)$ podemos concluir que $\{(1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A) \bigcap \mathcal{C}(A)$.

2) (1.0) Determine as coordenadas de $p(t) = t$ na base ordenada $\{2-t, 2+t\}$ de $\mathcal{P}_1$, onde $\mathcal{P}_1$ designa o espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1.

Resolução: Pretendemos determinar escalares α, β tais que

$$p(t) = \alpha(2-t) + \beta(2+t),$$

isto é $t = (2\alpha + 2\beta) + (-\alpha + \beta)t$. Logo $2\alpha + 2\beta = 0$ e $-\alpha + \beta = 1$ e portanto $\alpha = -1/2$ e $\beta = 1/2$. As coordenadas de $p(t)$ na base são pois $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3) (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ c & d & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Determine a, b, c, d tais que $\dim(\mathcal{N}(A))$=2 e $(1,0,2) \in \mathcal{L}(A)$.

Resolução: Como

$$\dim \mathcal{N}(A) + \operatorname{car}(A) = n^o \text{ de colunas de } A,$$

concluimos que car(A)=1, e portanto $\dim(\mathcal{L}(A)) = 1$. Por outro lado, $(1,0,2) \in \mathcal{L}(A)$ implica que $\{(1,0,2)\}$ seja uma base de $\mathcal{L}(A)$. Portanto têm que esxistir escalares α e β tais que

$$(4, a, b) = \alpha(1,0,2) \quad e \quad (c, d, 4) = \beta(1,0,2).$$

Concluimos que $a = 0, b = 8, c = 2, d = 0$ e portanto $A = \begin{bmatrix} 4 & \mathbf{0} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & 4 \end{bmatrix}$.