**Resolução do 2$^o$ TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR**

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

**1)** Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; (*).$$

**a)** Atendendo a (*) $\dim \mathcal{N}(A) = 4 - \dim \mathcal{C}(A) = 4 - \operatorname{car} A = 4 - 1 = 3$.

**b)** $\{(1,0,0,0)\}$ não é base de $\mathcal{C}(A)$ uma vez que $(1,0,0,0) \notin \mathcal{C}(A)$. Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é por exemplo $\{(1,-1,1,-1)\}$ e $(1,0,0,0) \notin L\{(1,-1,1,-1)\}$.

**2) a)** $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \; x+y+z+w = 0\} = \{(-y-z-w, y, z, w) : \; y,z,w \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\})$. O conjunto $\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ é uma base para $U$, uma vez que gera $U$ e, é também linearmente independente.

**b)** Atendendo a que $U = L(\{(1,-1,-1,1), (-1,0,0,1), (-1,1,0,0), (-1,0,1,0)\})$ e

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então $\{(1,-1,-1,1), (-1,0,0,1), (-1,1,0,0)\}$ é uma base para $U$, uma vez que gera $U$ e, é também linearmente independente.

**3)** Como 1 e 2 são as coordenadas de $(1,1)$ em $\mathcal{B}_1$ pois $(1,1) = 1(1,-1) + 2(0,1)$, e sendo $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$, então as coordenadas de $(1,1)$ em $\mathcal{B}_2$ são $-1$ e 2 uma vez que $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

**4)** Como $p(-1) = 2p(0) - p(1) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 2a_0 - (a_0 + a_1 + a_2) \Leftrightarrow a_2 = 0$ então
$V_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \; p(-1) = 2p(0) - p(1)\} = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_2 = 0\}$. Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_0 + a_1 \\ 0 & 0 & a_0 + a_1 + a_2 \end{array}\right]$$

$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V_2 = L(\{-1+t, 1-t^2\}) \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0$. Logo $V_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$. Pelo que $V_1 \cap V_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0 \text{ e } a_2 = 0\} = \{-a_1 + a_1 t : a_1 \in \mathbb{R}\} = L(\{-1+t\})$. Como $\{-1+t\}$ gera $V_1 \cap V_2$ e, é também linearmente independente, então é uma base para $V_1 \cap V_2$.

**5)** Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha v + \beta A v + \gamma A^2 v + \delta A^3 v = \mathbf{0}$. Multiplicando a igualdade anterior por $A^3$ e atendendo a que $A^4 = \mathbf{0}$ e assim $A^5 = A^6 = A^7 = \mathbf{0}$, então $\alpha A^3 v = \mathbf{0}$ e deste modo $\alpha = 0$ uma vez que $A^3 v \neq \mathbf{0}$ ($v \notin \mathcal{N}(A^3)$). Analogamente: multiplicando a igualdade $\beta A v + \gamma A^2 v + \delta A^3 v = \mathbf{0}$ por $A^2$ tem-se $\beta = 0$, multiplicando a igualdade $\gamma A^2 v + \delta A^3 v = \mathbf{0}$ por $A$ tem-se $\gamma = 0$ e finalmente de $\delta A^3 v = \mathbf{0}$ obtém-se $\delta = 0$. Logo, o conjunto $\{v, Av, A^2 v, A^3 v\}$ é linearmente independente.