Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2^o Semestre 2010/2011
21 de Março de 2011
Duração: 45 minutos

Resolução do 1^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & & 0 \\ 3 & 2 & 1 & & 4 \\ -1 & 2 & 5 & & -4 \\ \alpha & 2\alpha & 3 & & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-3L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ -\alpha L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & & 0 \\ 0 & -4 & -8 & & 4 \\ 0 & 4 & 8 & & -4 \\ 0 & 0 & 3(1-\alpha) & & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & & 0 \\ 0 & -4 & -8 & & 4 \\ 0 & 0 & 3(1-\alpha) & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right].$$

a) O sistema é possível e determinado se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Para $\alpha = 1$, tem-se o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -4y - 8z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 2 \\ y = -2z - 1. \end{cases}$

Assim, a solução geral do sistema é dada por: $S = \{(z+2, -2z-1, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

2) $I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} A = A \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} A = I \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3) $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

logo A é invertível.

$$(A^{-1})_{(4,2)} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)_{(2,4)} = \frac{1}{-3}(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_1+L_3\to L_3}{=} -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

4) Seja $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $Au = \mathbf{0}$ para qualquer $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ fixo, seja $e_j = (\delta_{ij})_{n\times 1} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ em que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$ Como

$$Ae_j = \mathbf{0}$$

para todo o $j \in \{1, ..., n\}$ e por outro lado

$$Ae_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

para todo o $j \in \{1, ..., n\}$, então $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ para todo o $j \in \{1, ..., n\}$ pelo que $A = \mathbf{0}$.