RESOLUÇÃO DO TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) a) $Au - \lambda u = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 4.$

b) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1,0,-1)\})$. $\{(1,0,-1)\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

c) $Au = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Au = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \underset{\textbf{a) e b)}}{\Leftrightarrow} u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) A equação $Au = b$ tem sempre solução se e só se $b \in \mathcal{C}(A) = L(\{(1,0,1),(0,1,0)\})$

2) $\det(A^6 - A^5) = (\det A)^5 \det(A - I) = \left(\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^5 \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3.$

3) $AXB - B = AX\det(A^TA) \Leftrightarrow AX\left(B - I\underbrace{\det(A^TA)}_{=1}\right) = B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4) a) Como $1 - t^2 = t - t^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2 + 2t)$, as coordenadas de $1 - t^2$ na base $\mathcal{B}$ são 1 e $-\frac{1}{2}$.

b) $\mathcal{B}_1 = \left\{1(t - t^2) + 0(-2 + 2t), 1(t - t^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2 + 2t)\right\} = \{t - t^2, 1 - t^2\}$.

c) $V \underset{3-t\in V}{=} L(\{-1 + t^2, -2 + t - t^2\})$. Como $-1 + t^2 \in U$ e $-2 + t - t^2 \notin U$, tem-se $U + V = \mathcal{P}_2$ e assim $\{-1 + t^2\}$ é uma base para $U \cap V$.

5) Sendo $A \in \mathcal{M}_{5\times 6}(\mathbb{R})$, tem-se $A^TA \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$. Como $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^TA)$ e

$$\dim \mathcal{N}(A) = 6 - \operatorname{car} A \geq 6 - 5 = 1$$

então $1 \leq \dim \mathcal{N}(A) \leq \dim \mathcal{N}(A^TA)$. Logo $\dim \mathcal{N}(A^TA) \neq 0$ pelo que A^TA não é invertível, isto é,

$$\det(A^TA) = 0.$$

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) a) Os vectores $u_1 = (1,1,0,0), u_2 = (1,0,1,-1)$ formam uma base de V. Seja $\{v_1, v_2\}$ a base ortogonal de V que se obtém aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores u_1 e u_2. Portanto, $v_1 = u_1 = (1,1,0,0)$ e

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\, u_1 = (1,0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1).$$

Assim, $u = P_V(2,-2,1,-1) =$

$$\frac{\langle (2,-2,1,-1), v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\, v_1 + \frac{\langle (2,-2,1,-1), v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}\, v_2 = \frac{0}{2}(1,1,0,0) + \frac{4}{5/2}\,(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1) = \frac{1}{5}(4,-4,8,-8)$$

e $v = P_{V^\perp}(2,-2,1,-1) = (2,-2,1,-1) - P_V(2,-2,1,-1) = \frac{1}{5}(6,-6,-3,3)$. Finalmente

$$d((1,1,1,1), V) = ||P_{V^\perp}(1,1,1,1)|| = ||(1,1,1,1) - P_V(1,1,1,1)|| = ||(0,0,1,1)|| = \sqrt{2}.$$

b) Como $x = y - 2z - 3w$ e $(y-2z-3w, y, z, w) = y(1,1,0,0) + z(-2,0,1,0) + w(-3,0,0,1)$ concluí-se que $W = L((1,1,0,0), (-2,0,1,0), (-3,0,0,1))$. Portanto, $W^\perp = \mathcal{N}(A)$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $(1,1,0,0), (1,0,1,-1) \in W$, pelo que qualquer combinação linear entre eles também pertence a W (porque W é um espaço linear). Portanto $V \subset W$. Assim, $W^\perp \subset V^\perp$, donde $W^\perp \cap V^\perp = W^\perp$. Mais, $\{(1,-1,2,3)\}$ é uma base de $W^\perp$ pois $W^\perp = \mathcal{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

d) Não, pois pela alínea c) podemos concluir que $W^\perp \subset V^\perp$ e portanto $W^\perp + V^\perp = V^\perp \neq \mathbb{R}^4$.

2) a) O polinómio caracterísico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 1^2\big) = -\lambda(\lambda-2)^2,$$

donde $\{0,2\}$ é o conjunto dos valores próprios de A com $m_a(0) = 1$ e $m_a(2) = 2$.

b) $\{(1,0,-1)\}$ é uma base para o espaço próprio $E_0 = \mathcal{N}(A)$ e $\{(1,0,1), (0,1,0)\}$ é uma base para o espaço próprio $E_2 = \mathcal{N}(A - 2I) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Portanto $\{(1,0,-1), (1,0,1), (0,1,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

c) $(1,0,-1)$ é vector próprio da matriz A pela alínea b), mas não é vector próprio da transformação linear T, pois $T(1,0,-1) = (2,2,0)$; note que $T(1,0,-1) =$

$$T\big(1(1,0,0) + 1(1,1,0) - 1(1,1,1)\big) = T(1,0,0) + T(1,1,0) - T(1,1,1) = T(1,1,0) = 2(1,1,0).$$

d) $(1,0,0)$ é uma solução particular de $T(x,y,z) = (1,0,1)$, i.e. $T(1,0,0) = (2,1,1)$. Por outro lado $\{(-1,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$ e portanto $\{(0,1,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$, pois $(0,1,1) = -1(1,0,0) + 0(1,1,0) + 1(1,1,1)$. Logo a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (1,0,1)$ é:

$$(1,0,0) + c(0,1,1) = (1,c,c), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

e) Temos $\big\langle (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3)\big\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. Como os valores próprios de A não são todos positivos, podemos concluir que a aplicação não define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

3) Se λ é valor próprio de A então λ^{k+1} é valor próprio de A^{k+1}, pois $Au = \lambda u$ implica $A^{k+1}u = \lambda^{k+1}u$. Sendo A é nilpotente, então $\lambda^{k+1} = 0$, logo $\lambda = 0$ é o único valor próprio de A.

Se A fosse diagonalizável então existe uma matriz invertível S tal que $A = S^{-1}DS$ onde D é a matriz diagonal cujas entradas na diagonal são formadas pelos valores próprios de A. Como $\lambda = 0$ é o único valor próprio de A, $D = \mathbf{0}$ e portanto $A = S^{-1}\mathbf{0}S = \mathbf{0}$, o que é absurdo porque $A^k \neq \mathbf{0}$.