Resolução do 3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (25 de Janeiro de 2011**)**
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

I – T1+T2

1) a) $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \underset{\substack{\alpha L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha^2-1 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$. $\operatorname{car} A_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 1 \\ 3 & \text{se } \alpha = -1 \\ 4 & \text{se } \alpha \neq 1 \text{ e } \alpha \neq -1. \end{cases}$

b) A_α é 4×4. Logo A_α é invertível se e só se $\operatorname{car} A_\alpha = 4$. Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

c) $\det\left((A_0)^n + (A_0)^{n+2}\right) = \det\left[(A_0)^n \left(I + (A_0)^2\right)\right] = \underbrace{(\det A_0)^n}_{=1} \det\left(I + (A_0)^2\right) = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 20.$

d) $\left((A_\alpha)^{-1}\right)_{(3,1)} = \dfrac{1}{\det A_\alpha} (\operatorname{cof} A_\alpha)_{(1,3)} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2 (1+\alpha)} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} = \dfrac{1-\alpha^2}{(1-\alpha)^2(1+\alpha)} = \dfrac{1}{1-\alpha}.$

e) $\mathcal{N}(A_{-1}) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1,-1,0,0)\})$. $\{(1,-1,0,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.

f) Por a), $\mathcal{B} = \{(-1,-1,0,-1), (0,1,1,0), (-1,0,1,1)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{C}(A_{-1})$, pelo que $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$. Como $(0,0,0,1) = -\frac{1}{2}(-1,-1,0,-1) - \frac{1}{2}(0,1,1,0) + \frac{1}{2}(-1,0,1,1)$ então $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são as coordenadas de $(0,0,0,1)$ na base ordenada $\mathcal{B}$.

g) A matrix A_0 é invertível, pelo que $A_0 u = b$ têm uma única solução, que é $u = (1,0,0,0)$.

h) Por a), $\{(-1,1,0,-1), (0,0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A_1)$ e $\{(-1,1,0,-1), (0,-1,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A_1)$. Como $\mathcal{B}' = \{(-1,1,0,-1), (0,-1,1,0), (0,0,1,1)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$ então $\mathcal{B}'$ é uma base de $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.

i) Por a) e f), $\{(-1,-1,0,-1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A_{-1})$ e $\{(-1,-1,0,-1), (0,1,1,0), (-1,0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A_{-1})$. Como por f) $(0,0,0,1) \in \mathcal{C}(A_{-1})$, e $(0,0,1,1) \notin \mathcal{C}(A_{-1})$ então $\{(-1,-1,0,-1), (0,0,0,1)\}$ é uma base $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{C}(A_1)$.

2) Como $B = C + B - C$ e $\mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(C + B - C) \subset \mathcal{C}(C) + \mathcal{C}(B - C)$ então $\operatorname{car} B = \dim \mathcal{C}(B) \leq \dim \mathcal{C}(C) + \dim \mathcal{C}(B - C) = \operatorname{car} C + \operatorname{car}(B - C)$. Pelo que $\operatorname{car} B - \operatorname{car} C \leq \operatorname{car}(B - C)$. De um modo análogo, como $C = B + [-(B - C)]$ e $\mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(B + [-(B - C)]) \subset \mathcal{C}(B) + \mathcal{C}(B - C)$ então $\operatorname{car} C - \operatorname{car} B \leq \operatorname{car}(B - C)$. Logo $|\operatorname{car} B - \operatorname{car} C| \leq \operatorname{car}(B - C)$.

II – T3

1) a) Como $Au_1 = (\alpha+1)u_1$ e $Au_2 = (\alpha-1)u_2$ então u_1, u_2 são vectores próprios de A, associados respectivamente aos valores próprios $\alpha+1$ e $\alpha-1$.

b) $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (3-\lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2-1\right] = (3-\lambda)(\lambda-\alpha-1)(\lambda-\alpha+1)$. Para ($\alpha+1 \neq 3$ e $\alpha-1 \neq 3$) $\Leftrightarrow \alpha \notin \{2,4\}$ os valores próprios de A: $3, \alpha+1$ e $\alpha-1$ são todos distintos.

c) Para $\alpha \notin \{2,4\}$, $\{u_1\}$, $\{u_2\}$ e $\{(3-\alpha, \alpha^2-6\alpha+8, 1)\}$ são bases de $E_{\alpha+1}$, $E_{\alpha-1}$ e E_3, respectivamente.
Para $\alpha = 2$, $E_3 = E_{\alpha+1}$. Além disso, $\{u_2\}$ é uma base de $E_{\alpha-1}$ e $\{u_1\}$ é uma base de E_3.
Para $\alpha = 4$, $E_3 = E_{\alpha-1}$. Além disso, $\{u_2\}$ é uma base de E_3 e $\{u_1\}$ é uma base de $E_{\alpha+1}$.

d) Para $\alpha \notin \{2,4\}$ a matriz A é diagonalizável, pois os seus valores próprios são todos distintos. Se $\alpha = 2$ ou $\alpha = 4$ então 3 é valor próprio de A e $m_g(3) = 1 < 2 = m_a(3)$, pelo que A não é diagonalizável. Logo A é diagonalizável $\Leftrightarrow \alpha \notin \{2,4\}$.

2) a) $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Como $\det M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) \neq 0$ então T é invertível e $T(u) = (2,-3,3,-2) \Leftrightarrow u = T^{-1}(2,-3,3,-2)$. Como $M(T^{-1};\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então atendendo a que as coordenadas de $(2,-3,3,-2)$ em $\mathcal{B}$ são 2 e -3 pois $(2,-3,3,-2) = 2v_1 - 3v_2$, tem-se que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ são as coordenadas de u na base $\mathcal{B}$. Logo $T(u) = (2,-3,3,-2) \Leftrightarrow u = -3v_1 - 2v_2 = (-3,-2,2,3)$, ou seja $u = (-3,-2,2,3)$ é a única solução da equação linear $T(u) = (2,-3,3,-2)$.

c) Como $V^\perp = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = L(\{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\})$ então $\{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$ é uma base de $V^\perp$. Como $\langle(0,1,1,0),(1,0,0,1)\rangle = 0$ então $\{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$ é uma base ortogonal de $V^\perp$.

d) $d(p,V) = ||P_{V^\perp}(p)|| = \left\| \frac{\langle(a,b,2-b,2-a),(0,1,1,0)\rangle}{\langle(0,1,1,0),(0,1,1,0)\rangle}(0,1,1,0) + \frac{\langle(a,b,2-b,2-a),(1,0,0,1)\rangle}{\langle(1,0,0,1),(1,0,0,1)\rangle}(1,0,0,1) \right\| = ||(1,1,1,1)|| = 2.$

e) Como $R(1,0,0,0) = R(v_1) + R(w_2) = v_2 = (0,1,-1,0)$, $R(0,1,0,0) = R(v_2) + R(w_1) - R(w_2) = v_1 = (1,0,0,-1)$, $R(0,0,1,0) = R(w_1) - R(w_2) = (0,0,0,0)$ e $R(0,0,0,1) = R(w_2) = (0,0,0,0)$ então, sendo $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, $M(R;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pelo que $R(u) = (2,-3,3,-2) \Leftrightarrow$ $M(R;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c)u = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow u \in \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : -b = 2,\ a = -3,\ c,d \in \mathbb{R}\} = \{(-3,-2,c,d) : c,d \in \mathbb{R}\}$. Isto é, a solução geral de $R(u) = (2,-3,3,-2)$ é: $\{(-3,-2,c,d) :\ c,d \in \mathbb{R}\}$.

3) Os casos $k = 0$ ou $k = n$ são triviais, pelo que vamos supôr que $1 \leq k \leq n-1$. Sejam $\{v_1, ...v_k\}$ uma base de V e $\{w_1, ..., w_{n-k}\}$ uma base de $V^\perp$ de modo a que $\mathcal{B} = \{v_1, ...v_k, w_1, ..., w_{n-k}\}$ seja uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$. A matriz que representa P em relação a $\mathcal{B}$ é a matriz diagonal com as primeiras k entradas da diagonal principal iguais a 1 e as restantes iguais a zero (note que $P(v_i) = v_i$ e $P(w_j) = 0$ para todos os $i \in \{1,...,k\}$, $j \in \{1,...,n-k\}$). Logo P é diagonalizável e o polinómio característico é dado por: $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda-1)^k\lambda^{n-k}$.