Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
16 de Junho de 2011
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) Determine o número real λ para o qual $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é solução da equação: $Au - \lambda u = \mathbf{0}$.

b) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

c) (1.0) Resolva a equação: $Au = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$.

d) (1.0) Determine todos os vectores b para os quais a equação $Au = b$ tenha sempre solução.

2) (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A^6 - A^5)$.

3) (1.0) Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que

$$AXB - B = AX \det\left(A^T A\right).$$

4) Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Seja $\mathcal{B} = \{t - t^2, -2 + 2t\}$ uma base ordenada de um subespaço U de $\mathcal{P}_2$.

a) (1.0) Determine as coordenadas do vector $1 - t^2$ na base $\mathcal{B}$.

b) (1.0) Determine a base ordenada $\mathcal{B}_1$ de U de tal modo que a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}$ seja dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) (1.0) Sendo $V = L\left(\{-1 + t^2, -2 + t - t^2, 3 - t\}\right)$, determine, justificando, uma base para $U \cap V$.

5) (1.0) Seja A uma matriz real do tipo 5×6. Calcule, justificando, $\det\left(A^T A\right)$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) Considere o espaço linear $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$$V = L\big((1,1,0,0),(1,0,1,-1)\big), \qquad W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x - y + 2z + 3w = 0\}.$$

a) (1.0) Determine $u \in V$ e $v \in V^\perp$ tais que $(2,-2,1,-1) = u+v$ e calcule a distância entre $(1,1,1,1)$ e V.

b) (1.0) Encontre uma matriz A tal que $W^\perp = \mathcal{N}(A)$.

c) (1.0) Verifique que $V \subset W$ e determine uma base para $W^\perp \cap V^\perp$.

d) (1.0) Verifique se $V^\perp + W^\perp = \mathbb{R}^4$, justificando.

2) Considere matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere a base ordenada $B = \{(1,0,0),(1,1,0)),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $A = M(T;B;B)$.

a) (1.0) Determine os valores próprios da matriz A.

b) (1.0) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

c) (1.0) Verifique se o vector $(1,0,-1)$ é vector próprio da matriz A ou da transformação linear T.

d) (1.0) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x,y,z) = (2,1,1)$.

e) (1.0) Verifique se a aplicação

$$\big\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle = x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^3$. Justifique.

3) (1.0) Seja A matriz real $n \times n$ nilpotente, isto é, existe um natural k tal que $A^k \neq \mathbf{0}$ e $A^{k+1} = \mathbf{0}$. Prove que A não é diagonalizável.