Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
25 de Janeiro de 2011
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\mathcal{C}(A_\alpha)$, $\mathcal{L}(A_\alpha)$ e $\mathcal{N}(A_\alpha)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A_α. Sejam A_0, A_{-1} e A_1 as matrizes que se obtêm de A_α fazendo respectivamente $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$.

a) (1.0) Determine a característica de A_α em função do parâmetro α.

b) (1.0) Diga, justificando, quais são os valores de α para os quais A_α é invertível.

c) (1.0) Seja $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\det\left((A_0)^n + (A_0)^{n+2}\right)$.

d) (1.0) Considerando os valores de α para os quais A_α é invertível, calcule a entrada $(3,1)$ da matriz inversa de A_α.

e) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.

f) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$ e calcule as coordenadas de $(0,0,0,1)$ nessa base.

g) (1.0) Determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_0 u = b$, onde b é igual à 1^a coluna da matriz A_0.

h) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.

i) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_{-1}) \cap \mathcal{C}(A_{-1})$.

2) (1.0) Sejam B e C matrizes $m \times n$. Mostre que

$$|\operatorname{car} B - \operatorname{car} C| \leq \operatorname{car}(B - C).$$

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) Para cada parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, sejam

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Prove que u_1 e u_2 são vectores próprios de A. Determine os valores próprios associados.

b) (1.0) Determine os valores próprios de A e indique os valores de α para os quais A tem 3 valores próprios todos distintos.

c) (1.0) Determine, em função de α, bases para os espaços próprios associados.

d) (1.0) Identifique, justificando, os valores de α para os quais a matriz A é diagonalizável.

2) Considere o espaço linear $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual. Seja V o subespaço linear gerado pelos vectores $v_1 = (1, 0, 0, -1)$ e $v_2 = (0, 1, -1, 0)$. Considere ainda a transformação linear $T : V \to V$ tal que

$$T(v_1) = v_2, \qquad T(v_2) = -v_1.$$

a) (1.0) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de V.

b) (1.0) Encontre, em V, a solução geral da equação $T(u) = (2, -3, 3, -2)$.

c) (1.0) Determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal $V^{\perp}$ de V em $\mathbb{R}^4$.

d) (1.0) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, seja $p = (a, b, 2 - b, 2 - a)$. Calcule a distância entre p e V.

e) (1.0) Sejam $w_1 = (0, 0, 1, 1)$, $w_2 = (0, 0, 0, 1)$ e considere a transformação linear $R : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$R(v_1) = v_2, \qquad R(v_2) = -v_1, \qquad R(w_1) = R(w_2) = (0, 0, 0, 0).$$

Encontre, em $\mathbb{R}^4$, a solução geral da equação $R(u) = (2, -3, 3, -2)$.

3) (1.0) Seja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a projecção ortogonal sobre um subespaço V de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k. Determine o polinómio característico de P e prove que P é diagonalizável.