Instituto Superior Técnico, Departamento de Matemática
Álgebra Linear 2006/2007, segundo semestre, agrupamentos AL-14 e AL-23
Segundo exame, 4 de Julho de 2007
Duração: 3 horas

Identificação (a preencher pelo aluno)

Número:AL-14, AL-23

Nome:Álgebra Linear 2006/2007 — Semestre de Primavera

Classificações (a preencher pelos docentes)

Alínea		Classificação
I.1	a	0.8
	b	1.0
	c	0.5
	d	1.0
	e	0.7
	f	0.5
I.2	a	0.8
	b	0.7
	c	0.4
	d	0.4
	e	0.7
	f	0.7
	g	0.8
I.3	a	1.0
	b	1.0
	c	0.7
	d	0.8
I.4	a	0.8
	b	0.7
	c	0.7
	d	0.7
	e	0.6
	f	0.8
II		3.0

TOTAL: 20.0

Respostas (a preencher pelo aluno)

I.1(a)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

A característica da matriz dos coeficientes é 2 e a característica da matriz aumentada $[A|\boldsymbol{b}]$ é 3. Como são diferentes, o sistema é impossível.

I.1(b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & x \\ 3 & 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & -2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -3 & -3x+y \\ 0 & -2 & -3 & -x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -3 & -3x+y \\ 0 & 0 & 0 & 2x-y+z \end{array}\right]$$

O sistema é possível se e só se $2x - y + z = 0$. Nesse caso é necessariamente indeterminado, uma vez que existe uma coluna da matriz dos coeficientes sem pivot, à qual portanto corresponde uma variável livre.

I.1(c)

Como já foi observado, a característica de A é igual a 2. Portanto a nulidade é igual ao número de colunas de A menos a característica, ou seja, é igual a 1. A matriz A tem por isso núcleo não nulo, e portanto não é invertível.

I.1(d)

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 11 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 11 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 12 & 18 & 4 \\ 0 & 36 & 54 & 12 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 12 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema $A^T A = A^T \boldsymbol{b}$ é assim equivalente a

$$\begin{aligned} -u + 3v + 5w &= 1 \\ 6v + 9w &= 2 \,, \end{aligned}$$

onde a variável w corresponde a uma coluna sem pivot e por isso é livre, podendo então rescrever-se a solução do sistema em função desta variável:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}w \\ v &= -\frac{3}{2}w + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

O conjunto dos vectores-solução do sistema é então o seguinte:

$$\left\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u = \frac{1}{2}w,\ v = -\frac{3}{2}w + \frac{1}{3}\right\} .$$

$\boxed{\textbf{I.1(e)}}$

Da alínea (a) já sabemos que de A se obtém, por eliminação de Gauss, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

O núcleo de A é o núcleo desta última matriz, ou seja, o conjunto dos vectores $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

A variável w pode ser tomada como variável livre porque corresponde a uma coluna sem pivot e obtém-se

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}w \\ v &= -\frac{3}{2}w \,, \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e portanto a matriz B pode ser

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

$\boxed{\textbf{I.1(f)}}$

Sim, porque, conforme se viu nas aulas no capítulo dedicado ao método dos mínimos quadrados, $A^T A$ e A têm o mesmo núcleo.

$\boxed{\textbf{I.2(a)}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Cof} C &= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ & & \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ & & \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{I.2(b)}}$

Multiplicando a terceira coluna de C pela terceira coluna de $\operatorname{Cof} C$ (ou seja, aplicando a fórmula de Laplace à terceira coluna) obtém-se

$$\det C = 1 \times 3 + 0 \times (-2) + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0 .$$

$\boxed{\textbf{I.2(c)}}$

Uma vez que $\det C = 0$ a matriz não tem inversa.

$\boxed{\textbf{I.2(d)}}$

O traço é a soma das entradas da diagonal principal:

$$\operatorname{Tr} C = 1 + 1 + 3 = 5 \ .$$

$\boxed{\textbf{I.2(e)}}$

Multiplicando C pelo vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ obtém-se $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Portanto $C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ com $\lambda = 3$. Uma vez que o vector não é nulo, conclui-se, directamente pela definição de vector próprio, que é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$.

$\boxed{\textbf{I.2(f)}}$

Da alínea anterior conhecemos um valor próprio

$$\lambda_1 = 3 \ .$$

Por outro lado sabemos que existe um valor próprio $\lambda_2 = 0$ porque a matriz C é singular. Portanto o terceiro valor próprio pode ser obtido a partir da igualdade

$$\operatorname{Tr} C = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ ,$$

pelo que

$$\lambda_3 = 2 \ .$$

A multiplicidade algébrica de cada valor próprio é 1 e portanto a multiplicidade geométrica de cada valor próprio também é 1.

$\boxed{\textbf{I.2(g)}}$

A matriz C é diagonalizável porque para cada valor próprio as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem. Para encontrar a matriz de mudança de base vamos calcular uma base de $\mathbb{R}^3$ contituída por vectores próprios de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que já conhecemos um vector próprio associado a $\lambda_1 = 3$ vamos calcular apenas vectores próprios associados a $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 2$.

$\lambda_2 = 0$ — o espaço próprio $E(0)$ é o núcleo de C; aplicando eliminação de Gauss a C obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma solução não nula é, fazendo $z = 1$ (variável livre), $x = 1$ e $y = -2$. Um vector próprio associado a 0 é por isso $(1, -2, 1)$.

$\lambda_3 = 2$ — o espaço próprio $E(2)$ é o núcleo de $C - \lambda_3 I = C - 2I$; aplicando eliminação de Gauss a esta matriz obtemos

$$C - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma solução não nula é, fazendo $z = 1$ (variável livre), $x = -1$ e $y = -2$. Um vector próprio associado a 0 é por isso $(-1, -2, 1)$.

A matriz de mudança de base pretendida pode assim ser formada pelos três vectores próprios encontrados (que são necessariamente linearmente independentes porque estarem associados a valores próprios distintos):

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ter-se-á, uma vez que as colunas são respectivamente os vectores próprios que determinámos para λ_1, λ_2 e λ_3:

$$S^{-1}CS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{I.3(a)}}$

Sejam $p, q \in \mathcal{P}_3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Uma vez que a operação de diferenciação em ordem a x é linear, obtemos

$$T(p+q) = (p+q)' - x(p+q)'' = p' + q' - x(p'' + q'') = p' - xp'' + q' - xq'' = T(p) + T(q)$$

$$T(\alpha p) = (\alpha p)' - x(\alpha p)'' = \alpha p' - x\alpha p'' = \alpha p' - \alpha x p'' = \alpha(p' - xp'') = \alpha T(p)$$

e portanto T é linear.

I.3(b)

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1' - x1'' = 0 \\
T(x) &= x' - xx'' = 1 - x \times 1' = 1 - x \times 0 = 1 \\
T(x^2) &= (x^2)' - x(x^2)'' = 2x - x(2x)' = 2x - 2x = 0 \\
T(x^3) &= (x^3)' - x(x^3)' = 3x^2 - x(3x^2)' = 3x^2 - x(6x) = -3x^2
\end{aligned}$$

Os vectores de coordenadas de $T(1), T(x), T(x^2), T(x^3)$ em $\mathbb{R}^4$ em relação à base ordenada $(1, x, x^2, x^3)$ são respectivamente

$$(0,0,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,0,0,0),\ (0,0,-3,0)$$

e a matriz da transformação linear é aquela cujas colunas são estes vectores, por esta ordem:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I.3(c)

A matriz A é uma matriz em escada de linhas. Há duas colunas sem pivots e portanto o núcleo tem dimensão dois, sendo duas soluções linearmente independentes do sistema homogéneo cuja matriz dos coeficientes é A os vectores $(1,0,0,0)$ e $(0,0,1,0)$. Uma base do núcleo de T é assim formada pelos polinómios cujos vectores de coordenadas em relação à base canónica e $\mathcal{P}_3$ são estes vectores:

$$\{1, x^2\}$$

I.3(d)

Uma base do espaço das colunas de A é formada pelas duas colunas de A que têm pivots, uma vez que a matriz A está na forma de escada de linhas: $(1,0,0,0)$, $(0,0,-3,0)$. Estes são os vectores de coordenadas dos polinómios 1 e $-3x^2$, os quais formam uma base do contradomínio de T (que neste caso evidentemente coincide com o núcleo).

I.4(a)

Sejam $p, q, r \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Primeiro verificamos que φ é linear na primeira variável:

$$\begin{aligned}
\varphi(p+\alpha q, r) &= (p+\alpha q)(0)\overline{r(0)} + (p+\alpha q)(i)\overline{r(i)} + (p+\alpha q)(-i)\overline{r(-i)} \\
&= (p(0)+\alpha q(0))\overline{r(0)} + (p(i)+\alpha q(i))\overline{r(i)} + (p(-i)+\alpha q(-i))\overline{r(-i)} \\
&= p(0)\overline{r(0)} + p(i)\overline{r(i)} + p(-i)\overline{r(-i)} + \alpha(q(0)\overline{r(0)} + q(i)\overline{r(i)} + q(-i)\overline{r(-i)}) \\
&= \varphi(p,r) + \alpha\varphi(q,r)\ .
\end{aligned}$$

Agora verificamos que φ tem simetria Hermitiana:

$$\begin{aligned}
\varphi(p,q) &= p(0)\overline{q(0)} + p(i)\overline{q(i)} + p(-i)\overline{q(-i)} \\
&= \overline{\overline{p(0)}q(0) + \overline{p(i)}q(i) + \overline{p(-i)}q(-i)} \\
&= \overline{q(0)\overline{p(0)} + q(i)\overline{p(i)} + q(-i)\overline{p(-i)}} \\
&= \overline{\varphi(q,p)}\ .
\end{aligned}$$

Por fim verificamos que φ é definitida positiva:

$$\begin{aligned}
\varphi(p,p) &= p(0)\overline{p(0)} + p(i)\overline{p(i)} + p(-i)\overline{p(-i)} \\
&= |p(0)|^2 + |p(i)|^2 + |p(-i)|^2\ ;
\end{aligned}$$

tem-se $\varphi(p,p) = 0$ se e só se

$$p(0) = p(i) = p(-i) = 0\ ,$$

ou seja, se e só se $p = 0$ porque o único polinómio do segundo grau com mais do que duas raízes distintas é o polinómio nulo.

I.4(b)

Designando por $||.||_\varphi$ a norma associada a φ temos:

$$\begin{aligned}
||p||_\varphi &= (\varphi(p,p))^{1/2} \\
&= (|p(0)|^2 + |p(i)|^2 + |p(-i)|^2)^{1/2} \\
&= (1^2 + |1 + i\times i - i\times i^2|^2 + |1 + i\times(-i) - i\times(-i)^2|^2)^{1/2} \\
&= (1 + |1 - 1 + i|^2 + |1 + 1 + i|^2)^{1/2} \\
&= (1 + |i|^2 + |2 + i|^2)^{1/2} \\
&= (1 + 1^2 + 2^2 + 1^2)^{1/2} \\
&= \sqrt{7}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{I.4(c)}}$

$$
\begin{aligned}
\varphi(1,1) &= 1\times\overline{1}+1\times\overline{1}+1\times\overline{1}=3\\
\varphi(1,z) &= 1\times\overline{0}+1\times\overline{i}+1\times\overline{(-i)}=-i+i=0\\
\varphi(1,z^2) &= 1\times\overline{0^2}+1\times\overline{i^2}+1\times\overline{(-i)^2}=-1-1=-2\\
\varphi(z,z) &= 0\times\overline{0}+i\times\overline{i}+(-i)\times\overline{(-i)}=1+1=2\\
\varphi(z,z^2) &= 0\times\overline{0^2}+i\times\overline{i^2}+(-i)\times\overline{(-i)^2}=-i+i=0\\
\varphi(z^2,z^2) &= 0^2\times\overline{0^2}+i^2\times\overline{(-i)^2}+(-i)^2\times\overline{(-i)^2}=1+1=2
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{I.4(d)}}$

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} \varphi(1,1) & \varphi(1,z) & \varphi(1,z^2)\\ \varphi(z,1) & \varphi(z,z) & \varphi(z,z^2)\\ \varphi(z^2,1) & \varphi(z^2,z) & \varphi(z^2,z^2)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2\\ \overline{0} & 2 & 0\\ \overline{-2} & \overline{0} & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{I.4(e)}}$

Não é uma base ortogonal porque pelo menos dois dos vectores da base, nomeadamente 1 e z^2, não são ortogonais: $\varphi(1,z^2)=-2\neq 0$.

$\boxed{\textbf{I.4(f)}}$

Primeiro tomamos como base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ os vectores

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= 1\\
\boldsymbol{v}_2 &= z\\
\boldsymbol{v}_3 &= z^2
\end{aligned}
$$

Tomando $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$ podemos tomar $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2$ porque $\varphi(1, z) = 0$ e portanto a projecção ortogonal de $\boldsymbol{v}_2$ sobre $\boldsymbol{u}_1$ é nula. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - \frac{\varphi(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1)}{||\boldsymbol{u}_1||_\varphi^2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\varphi(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2)}{||\boldsymbol{u}_2||_\varphi^2}\boldsymbol{u}_2 \\
&= z^2 - \frac{\varphi(z^2, 1)}{||1||_\varphi^2}1 - 0 \\
&= z^2 - \frac{-2}{3}1 \\
&= z^2 + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

A resposta é:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= 1 \\
\boldsymbol{u}_2 &= z \\
\boldsymbol{u}_3 &= z^2 + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{II}}$

Primeiro observamos que se tem

$$\begin{aligned}
U &= \mathrm{Col}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) \\
V &= \mathrm{Col}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Vamos de seguida encontrar matrizes A_U e A_V tais que

$$\begin{aligned}
U &= \mathrm{Nuc}(A_U) \\
V &= \mathrm{Nuc}(A_V)\ ,
\end{aligned}$$

ou seja, vamos encontrar equações cartesianas para U e V. Primeiro, por eliminação de Gauss tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 2 & 3 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|r} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z - 3x - 2y \end{array}\right]$$

e portanto

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -3x - 2y + z = 0\} = \mathrm{Nuc}([-3 \ \ -2 \ 1]) \ .$$

De igual modo, por eliminação de Gauss temos (omitindo os passos intermédios)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & -3x + y + 2z \\ 0 & 1 & 1 & z - x \end{array}\right]$$

e portanto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -3x + y + 2z = 0\} = \mathrm{Nuc}([-3 \ 1 \ 2]) \ .$$

$U \cap V$ é portanto o espaço descrito por ambas as equações cartesianas, ou seja,

$$U \cap V = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} A_U \\ \cdots \\ A_V \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) .$$

Por eliminação de Gauss aplicada a esta última matriz obtém-se a seguinte matriz em escada de linhas:

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

A nulidade desta matriz é 1, o que nos permite imediatamente concluir que a dimensão de $U \cap V$ é 1. Para calcular uma base observamos que a terceira coluna da matriz não tem pivot e portanto tomando z como variável livre obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{9} z \\ y &= -\frac{1}{3} z \ . \end{aligned}$$

Logo, a solução geral é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5/9 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$U \cap V = L(\{(5/9, -1/3, 1)\}) = L(\{(5, -3, 9)\}) \ ,$$

sendo assim um exemplo de base de $U \cap V$ o conjunto $\{(5, -3, 9)\}$.

Grupo I (17 valores)

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   a) Diga, justificando, se o sistema $A \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$ é possível.

   b) A que condições devem satisfazer x, y e z para que o sistema $A \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ seja possível? Diga também se o sistema pode ser determinado.

   c) Qual é a nulidade e a característica de A? A matriz A tem inversa?

   d) Calcule os produtos $A^T A$ e $A^T \boldsymbol{b}$ e resolva o sistema

   $$A^T A \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = A^T \boldsymbol{b} \, .$$

   e) Obtenha uma matriz B tal que $\mathrm{Col}(B) = \mathrm{Nuc}(A)$.

   f) Tem-se $\mathrm{Col}(B) = \mathrm{Nuc}(A^T A)$? Justifique.

2. Seja $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   a) Calcule a matriz $\mathrm{Cof}\, C$ dos co-factores de C.

   b) Calcule o determinante de C.

   c) Diga se a matriz C tem inversa e em caso afirmativo calcule-a.

   d) Calcule o traço de C.

   e) Mostre que $(1, 1, 1)$ é um vector próprio de C e justifique que o valor próprio que lhe está associado é 3.

   f) Obtenha os restantes valores próprios e indique as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

   g) A matriz C é diagonalizável? Justifique e, em caso afirmativo, apresente uma matriz de mudança de base S tal que $S^{-1}CS$ seja diagonal.

3. Seja $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ a função que a cada polinómio $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$ faz corresponder o polinómio $p' - xp''$, onde p' e p'' são respectivamente a primeira e a segunda derivadas de p em ordem a x.

   a) Mostre, recorrendo directamente à definição, que T é uma transformação linear.

   b) Calcule $T(1)$, $T(x)$, $T(x^2)$ e $T(x^3)$ e diga qual é a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathcal{P}_3$.

   c) Obtenha uma base do núcleo de T.

   d) Obtenha uma base do contradomínio de T.

4. Seja $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ a função definida, para quaisquer dois polinómios $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, por

$$\varphi(p,q) = p(0)\overline{q(0)} + p(i)\overline{q(i)} + p(-i)\overline{q(-i)} \; .$$

   a) Mostre, recorrendo à definição, que φ é um produto interno.

   b) Calcule, para o produto interno φ, a norma do polinómio

$$p(z) = 1 + iz - iz^2 \; .$$

   c) Calcule os seguintes produtos internos dos vectores da base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$:

$$\varphi(1,1),\ \varphi(1,z),\ \varphi(1,z^2),\ \varphi(z,z),\ \varphi(z,z^2),\ \varphi(z^2,z^2) \; .$$

   d) Escreva a matriz M que representa φ em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ (ou, seja, a métrica de φ).

   e) Diga, justificando, se a base canónica $\{1, z, z^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ é uma base ortogonal para o produto interno φ.

   f) Recorrendo ao método de ortogonalização de Gram–Schmidt obtenha, relativamente ao produto interno φ, uma base ortogonal $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ tal que $\boldsymbol{u}_1 = 1$ e $L(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}) = L(\{1, z\})$.

Grupo II (3 valores)

Sejam U e V os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U &= L(\{(0,1,2),(1,0,3)\}) \\ V &= L(\{(1,1,1),(1,-1,2),(2,0,3)\}) \end{aligned}$$

Calcule a dimensão e uma base de $U \cap V$.