Instituto Superior Técnico, Departamento de Matemática
Álgebra Linear 2006/2007, segundo semestre, agrupamentos AL-14 e AL-23
Primeiro exame, 20 de Junho de 2007
Duração: 3 horas

Identificação (a preencher pelo aluno)

Número:____________

Nome:____

Classificações (a preencher pelos docentes)

Grupo I:

Alínea		Classificação
1	a	
	b	
2	a	
	b	
	c	
	d	
	e	
3		
4	a	
	b	
	c	
	d	
5	a	
	b	
	c	

Grupo II:

Pergunta	Classificação
1	
2	

TOTAL: ____________

Respostas (a preencher pelo aluno)

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ **Pergunta** ____ **Alínea** ____

Grupo ____ **Pergunta** ____ **Alínea** ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ **Pergunta** ____ **Alínea** ____

Grupo ____ **Pergunta** ____ **Alínea** ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ **Pergunta** ____ **Alínea** ____

Grupo ____ **Pergunta** ____ **Alínea** ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo ____ Pergunta ____ Alínea ____

Grupo I (17 valores)

1. Seja $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$ a matriz aumentada de um sistema de equações lineares.

   a) Usando o método da eliminação de Gauss, diga para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema é: (i) determinado; (ii) indeterminado; (iii) impossível.

   b) Diga, para $\alpha = 2$, qual é a nulidade da matriz dos coeficientes do sistema.

2. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1, 1, i) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1, 2, i) \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2, 1, 0) \end{aligned}$$

   a) Mostre que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ é uma base de $\mathbb{C}^3$.

   b) Diga qual é a matriz S de mudança de base para a base ordenada $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$, em relação à base canónica de $\mathbb{C}^3$.

   c) Calcule a matriz dos co-factores de S, o determinante de S e a matriz inversa S^{-1}.

   d) Sendo $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5i \\ 0 & 6 & 4i \\ -i & 2i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

   calcule a matriz que representa T na base $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$.
   [*Nota: neste exercício obtém-se uma matriz diagonal.*]

   e) Diga qual é o núcleo de T e o contradomínio de T.

3. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ a função que a cada polinómio de coeficientes reais $p(x) = a + bx + cx^2$ atribui o polinómio

$$T(p) = a + b + 2c + 2ax + (3a - 5c)x^2 - 3bx^3 \,.$$

   Diga, justificando, se T é uma transformação linear e em caso afirmativo indique a matriz que a representa em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$.

4. Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

   a) Escreva o polinómio característico da matriz M na forma
   $$p(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\ .$$
   b) Indique os valores próprios de M e as respectivas multiplicidades algébricas.
   c) Calcule as multiplicidades geométricas dos valores próprios de M.
   d) Diga, justificando, se a matriz M é diagonalizável e em caso afirmativo obtenha uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de M.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & i & 1 & 0 \\ -i & 0 & -i & 0 \\ 1 & i & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & i & i & i \\ i & 2 & i & i \\ i & i & 3 & i \\ i & i & i & 4 \end{bmatrix}$

   a) A matriz A é a métrica de um produto interno em $\mathbb{C}^4$. Justifique por que razão assim é e por que razões o mesmo não é verdade para as matrizes B e C.
   b) Calcule a norma do vector $(3, 0, 3, 0)$ em relação ao produto interno canónico de $\mathbb{C}^4$ e em relação ao produto interno de $\mathbb{C}^4$ cuja métrica é a matriz A.
   c) Obtenha uma base ortogonal, em relação ao produto interno de $\mathbb{C}^4$ definido pela métrica A, para o subespaço $V \subset \mathbb{C}^4$ que é gerado pelos vectores $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ e $(3, 2, 1, 0)$.
   (*Atenção: deverá começar por calcular uma base de V.*)

Grupo II (3 valores)

Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 8 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

1. Calcule uma base de $\mathrm{Nuc}(A - 6I) \cap \mathrm{Col}(A - 6I)$.

2. Determine uma forma canónica de Jordan J para a matriz A e indique a matriz de mudança de base S tal que $J = S^{-1}AS$.