Matemática I - 2017/2018

Exercícios 7

1 - Determinar a forma reduzida das matrizes

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$d)\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 - Usar a redução de Gauss-Jordan para determinar o cinjunto solução dos sistemas

$$a)\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x-y+z=1 \\ 4x+y+5z=1 \end{cases}$$

3 - Dizemos que duas matrizes são equivalentes por linhas se uma se puder obter da outra através de uma sucessão de operações nas linhas usadas no método de Gauss.
Decidir se as matrizes em cada um dos seguintes pares são equivalentes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4 - Uma matriz $n \times n$ é não singular se, para qualquer vector $b \in \mathbb{R}^n$, a equação $Ax = b$ tem solução única.
Justificar que duas matrizes $n \times n$ não singulares são sempre equivalentes por linhas.

5 - Deduzir se cada um dos seguintes conjuntos é um espaço vectorial. Em cada caso, a operação de soma e de multiplicação por um escalar é a habitual.

a) O conjunto dos vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x - y = 0$;

b) O conjunto dos vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $xz = 0$;

c) O conjunto dos vectores $u \in \mathbb{R}^3$ tais que $\|u\| < 1$;

d) O conjunto dos polinómios $p(x)$, com coeficientes reais e grau menor ou igual a 3, tais que $p(2) = 0$;

e) O conjunto dos polinómios $p(x)$, com coeficientes reais e grau menor ou igual a 3, tais que $p(2) = p(3)$;

f) O conjunto das matrizes $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tais que $b = c$.

6 - Verificar se o vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertence ao conjunto gerado pelos vectores

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7 - Quais dos seguintes conjuntos de vectores constituem um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$?

$a) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad b) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$c) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$d) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

8 - Determinar um conjunto finito que gere os espaços seguintes

a) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : 3a + 2b + c = 0 \right\}$;

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : 2x + y + w = 0; y + 2z = 0 \right\}$;