Matemática I - 2017/2018

Exercícios 3

1 - Calcular, nos pontos em que exista, a derivada de cada uma das funções seguintes:

$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$ R: $f'(x) = \frac{x(x^3+3x-2)}{(x^2+1)^2}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}\sin(x)$ R: $f'(x)) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\cos(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$f(x) = \tan(x)$ R: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f(x) = x|x|$ R: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

$f(x) = \frac{x}{|x|+|x-1|}$ R: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(2x-1)^2} & \text{se } x > 1 \\ \text{não existe} & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{(2x-1)^2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

$f(x) = \sqrt{x^4+x^2}$ R: $f'(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} & \text{se } x > 0 \\ \text{não existe} & \text{se } x = 0 \\ -\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

2 - Determinar as constantes a, b, c, d de modo a que a função

$$\begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ cx^2+dx & 0 < x \leq 1 \\ 1-\frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

seja diferenciável em $\mathbb{R}$.

R: $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ e $d = -1$.

3 - Calcular as derivadas das funções

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

R:

$$\sinh'(x) = \cosh(x); \cosh'(x) = \sinh(x); \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh 2(x)}$$

4 - Determinar as constantes a, b de modo a que a função

$$\begin{cases} ae^x - e^{2x} & x \leq 0 \\ \\ \ln(1+x^2) + b & x > 0 \end{cases}$$

seja diferenciável em $\mathbb{R}$.
Determinar a equção da recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 1.

R: $a = 2$ e $b = 1$. Uma equção da recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 1 é $y = x + \ln(2)$.

5 - Com uma folha quadrada de lado 10 cm, pretendemos construir uma caixa (sem tampa) recortando um pequeno quadrado em cada canto. De que tamanho devem ser os recortes para que o volume da caixa seja máximo?

R: Os recortes devem ter dimensões $5/2 \times 5/2$.

6 - Qual o cilindro com volume V que tem superfície com menor área?

R: O cilindro tem raio da base $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e altura $h = \frac{V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

7 - Determinar, em função do parâmetro a, quantas raizes reais tem o polinómio $p(x) = x^3 - 3x^2 - a$.

R: O número de raizes reais de $p(x)$ é

$$\begin{cases} 3 & \text{se } -4 < a < 0 \\ 1 & \text{se } a < -4 \text{ ou } a > 0 \\ " & \text{se } a = 0 \text{ ou } a = -4 \end{cases}$$

8 - Mostrar que todo o número real x satisfaz a desigualdade

$$4x^3 - 3x^4 \leq 1.$$

R: O máximo da função $f(x) = 4x^3 - 3x^4$ é atingido em $x = 1$ e $f(1) = 1$.

9 - Determinar qual o comprimento mínimo de um segmento vertical (ou seja, paralelo ao eixo $x = 0$) com um extremo na curva $y = 4x^3$ e o outro na curva $y = x^4 + 29$.

R: 2. O mínimo da função $f(x) = x^4 + 29 - 4x^3$ é atingido no ponto $x = 3$ e $f(3) = 2$.

10 - Determinar os extremos e intervalos de monotonia das funções

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = e^{-x}(x^2 - x - 1)$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \tfrac{x+3}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$h :: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = e^{-x^2+x}(1 - x)$$

11 - Mostrar que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três soluções reais.

12 - Mostrar que a equação $(1 - x)\cos(x) = \sin(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 1[$.

R: Por aplicação do Teorema do Valor Intermédio de Bolzano: a função $f(x) = (1 - x)\cos(x) - \sin(x)$ é contínua e $f(0) = 1 > 0 > -\sin(1) = f(1)$.

13 - Justificar que a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(\pi x) - 4x$$

tem inversa e calcular a derivada de f^{-1} no ponto 1.

R: $f'(x) = -\pi \sin(\pi x) - 4 \leq \pi - 4 < 0$ para todo o x. Logo f é estritamente decrescente e portanto invertível. Como $f(0) = 1$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{4}$$

14 - Calcular o limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(2x)}$.