Matemática I - 2017/2018

Exercícios 1

1 - Representar sob a forma de uma união de intervalos os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-5| \geq 3|x+3|\} \quad \text{R: } [-7,-1]$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x-4| < 8\} \quad \text{R: }]-3,5[$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-2| \leq x\} \quad \text{R: } [1,2]$$

2 - Representar sob a forma de uma união de intervalos os conjuntos

$X = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x-2} \leq 1\}$ R: $[-3,2[$

$Y = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < x\}$ R: $]-1,0[\cup]1,+\infty[$

$Z = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(x^3+x-2) \leq 0\}$ R: $[-1,1]$

$W = \{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-3)(x^2-2)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0\}$ R: $]-\infty,-\sqrt{2}]\cup]1/2,\sqrt{2}]\cup]2,3]$

3 - Determinar o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, das inequações

$a)$ $x^3 - 6x < x^2$ R: $]-\infty, -2[\cup]0, 3[$

$b)$ $x + \dfrac{1}{x} > 4$ R: $]0, 2-\sqrt{3}[\cup]2 + sqrt3, +\infty[$

$c)$ $x > \dfrac{2}{x+1}$ R: $]-2, -1[\cup]1, +\infty[$

$d)$ $x + 2 < \dfrac{2}{x(x-1)}$ R: $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]-1, 0[\cup]1, \sqrt{2}[$

$e)$ $\dfrac{x-2}{3} < \sqrt{x+2}$ R: $[2, 14[$

$f)$ $\sqrt{x+1} < \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$ R: $]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$

$g)$ $|2|x-1|-3| < 6$ R: $]-\frac{7}{2}, \frac{11}{2}[$

$h)$ $|x+2| > \dfrac{|x|}{x-1}$ R: $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

4 - Sendo $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ e X o conjunto do problema 2, determinar os conjuntos

$$\{f(x) : x \in X\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in X\}$$

.

R: $\{f(x) : x \in X\} = [2/5, 4]$ $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in X\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

5 - Sendo $p(x) = (x+1)(x-2)$, determinar o domínio e a expressão analítica das funções

$$f(x) = |p(x)| - p(|x|); \qquad g(x) = \frac{1}{|p(x)| + p(|x|)}$$

R: as funções são

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 2 \\ \\ -2x^2 + 2x + 4 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \\ -2x^2 + 4 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \\ -2x & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2-2x-4} & \text{se } x > \\ \\ \text{não definida} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \\ \frac{1}{2x} & \text{se } -1 < x < 0 \\ \\ \frac{1}{2x^2-4} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

6 - Qual é o menor intervalo fechado I que contém o conjunto

$$U = \left\{ (-1)^{n+1} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}?$$

E se for um intervalo aberto?

R: O menor intervalo fechado é $I = [-5/2, 2]$. Não existe um intervalo aberto contendo U que contenha qualquer outro intervalo aberto com a mesma propriedade.

7 - Considerando os conjuntos B e W dos exercícios 1 e 2 e $I = [-2, 2]$, determinar se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

$$\exists y \in B \; \forall x \in I : x + y \in W$$

$$\forall x \in I \; \exists y \in B : x + y \in W$$

Sugestão: para a primeira proposição, notar que, dado um intervalo $I = [a, b]$ e $y \in \mathbb{R}$, se tem $\{x + y : x \in I\} = [a + y, b + y]$.
Para a segunda, estudar a negação da proposição.

R: A primeira proposição é falsa. A segunda é verdadeira (a sua negação é falsa).

8 - Determinar o domínio de definição, em $\mathbb{R}$, de cada uma das expressões seguintes

$\ln(x^2 + x - 1)$ R: $]-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}[\cup]-\frac{1-\sqrt{5}}{2}, +\infty[$

$\ln(2 - e^{-x})$ R: $]-\ln(2), +\infty[$

$\sqrt{\frac{x}{2^x-3}}$ R: $]-\infty, 0]\cup]\sqrt{\ln(3)}\ln(2), +\infty[$