Matemática I - 2017/2018

Problemas (preparação para Teste 2)

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos.

1 - Determinar o conjunto de soluçøes do sistema de equaçøes

$$\begin{cases} x - z & = & 1 \\ y + 2z - w & = & 3 \\ x + 2y + 3z - w & = & 7 \end{cases}$$

2 - Determinar, em função do valor dos parâmetros a e b, o conjunto de soluç oo es do sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z + w & = & 1 \\ x + ay + z - w & = & b \end{cases}$$

3 - Determinar bases do núcleo e da imagem da aplicação linear definida, relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^4$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

4 - Determinar a equação cartesiana do plano com representação paramétrica

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

5 - Determinar uma representação paramétrica do plano definido pela equação cartesiana

$$2x + y + 4z = -1.$$

6 - Calcular a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

7 - Determinar se o vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8 - Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, calcular AB e BA e os respectivos determinantes.

9 - Se a matriz B do exercício anterior representa a aplicação linear $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ relativamente às bases

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determinar a matriz de h relativamente às bases canónicas dos dois espaços.

10 - A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ representa uma aplicação linear relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que existe uma base desse espaço relativamente à qual a mesma aplicação linear é representada por uma matriz diagonal.
Usar esse facto para obter uma fórmula geral para a matriz A^n.

11 - Recordando que $\mathcal{P}_3$ designa o espaço vectorial dos polinómios $p(x)$ com coeficientes reais e grau menor ou igual a 3, determinar uma base do subespaço vectorial

$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 0\}.$$

12 - Recordando que $\mathcal{P}_3$ designa o espaço vectorial dos polinómios $p(x)$ com coeficientes reais e grau menor ou igual a 3, mostrar que

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 : p(x) = p(x-1)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vectorial e determinar uma sua base.

13 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear que tem como resultado uma rotação de $\pi/4$, no sentido anti-horário em torno do eixo definido pelo vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, seguida de uma reflexão no plano definido pela equação cartesiana $2x - y + z = 0$.
Determinar a matriz de f relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

14 - Calcular a projec ção do vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre o plano que contém o o ponto de coordenadas (relativamente à base canónica) $(1,1,1)$ e a recta com representação paramétrica

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}.$$