Matemática I - 2017/2018

Problemas (preparação para Teste 1)

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos.

1 - Determinar o conjunto solução da inequação

$$\frac{2}{x-3} < \frac{x}{2x+1}.$$

2 - Seja $f(x) = \ln(3+2x)$. Calcular os limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}.$$

3 - Calcular, ou mostrar que não existem, os limites

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sqrt{1+x^3}-(1+x)}{x+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{x^2-\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4^x-2^x+1}-2^x$$

$$\lim_{n\to +\infty} \tfrac{n^2 2^n+3^n}{1+(-1)^n 3^{n+2}}$$

4 - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{e^x}{e^x-x}$.

a) Calcular a derivada $f'(x)$ e determinar os intervalos em que f crescente ou decrescente.

b) Calcular os limites $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

c) Decidir se f tem máximo e/ou mínimo.

Resolver o mesmo problema para $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x+2}$.

5 - Determinar a equação das rectas que passam no ponto $(0,-1)$ e são tangentes à parábola $y = x(x+1)$.

6 - Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{|x|+|x-1|}$, determinar, nos pontos em que existir, a derivada $f'(x)$.

7 - Qual a área máxima de um rectângulo inscrito num trângulo com lados de comprimento 6, 8 e 10, se dois dos lados ficarem sobre os catetos?

8 - Recorde-se a fórmula de primitivação por partes:

$$\int (f'g) = fg - \int (fg');$$

Aplicando essa fórmula duas vezes, determinar uma primitiva de $F(x) = e^x \cos(x)$.

9 - Calcular a área da região do plano limitada pelas curvas

$$y = \frac{x+4}{3} \qquad y = \sqrt{x+2}$$

10 - Recordar que se $u : [c,d] \to [a,b]$ é uma função estritamente crescente e diferenciável com $u(c) = a$ e $u(d) = b$, se tem, para qualquer função $f(x)$ contínua em $[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(u(t))u'(t)\,dt.$$

Calcular o integral

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$$

usando a substituição $x = u(t)$ inversa de $t = \sqrt{x+1}$.

11 - Uma partícula move-se em movimento rectilíneo com uma aceleração constante de $3m/s^2$. Sabendo que nos primeiros 4 segundos percorreu $40m$, determinar a sua velocidade inicial.

12 - A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições $f(3) = 1$ e

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|}}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.
Calcular $f(-3)$.

13 - Calcular o volume do sólido gerado pela revoluçãda região do plano

$$\{(x, y) : 1 < x < 2; 0 < y < \ln(x)\}$$

em torno do eixo $x = 0$.

14 - Sendo $F(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt$,

a) determinar $F'(x)$;

b) justificar que existe um único $u > 0$ tal que $F(u) = 2$;

c) mostrar que $\frac{3}{2} < u < \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Sugestão: Não tentar primitivar $\sqrt{t^2 - t + 1}$.
Recordar o Teorema do Valor Médio (de Lagrange): Se $F(x)$ é diferenciável no intervalo $[a, b]$, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a).$$