Matemática I

1 Limites

O conceito de limite é fundamental para o estudo de funções de variável real. Uma das situações em que ele aparece naturalmente é o do estudo do comportamento assintótico de uma função, ou seja do estudo dos seus valores quando "x tende para um certo valor"ou "tende para infinito"; muito informalmente, e imprecisamente, podemos descrever o limite de uma função f num ponto a (ou "no infinito") como o número l de que os valores de $f(x)$ se aproximam à medida que x se aproxima de a (ou tende para infinito). Claro que o limite l pode ele próprio ser não um número mas "infinito".
Antes de chegarmos a uma definição precisa deste conceito vamos observar alguns exemplos simples:

Exemplo 1.1 *Seja* $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{1}{x}$*; dizemos que o limite de* $f(x)$ *em* 0 *é* $+\infty$*, em notação matemática*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty;$$

a notação $x \to 0^+$ *indica que* x *se aproxima de* 0 *por valores positivos.*
Aquela afirmação não deixa dúvidas: de facto, à medida que $x \in \mathbb{R}^+$ *se aproxima de* 0*, os valores de* $f(x) = 1/x$ *tornam-se cada vez maiores, maiores do que qualquer valor real dado, ou seja, tendem para infinito.*

Por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

com exactamente a mesma justificação: à medida que x *aumenta, os valores de* $f(x)$ *aproximam-se cada vez mais de* 0*.*

Mais alguns exemplos:

Exemplo 1.2 *O limite* $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ *não existe: como é bem conhecido, a função seno é definida como sendo periódica (com período* 2π*) e portanto os seus valores oscilam entre* 1 *e* -1*, infinitas vezes à medida que* x *tende para* $+\infty$*.*
Por outro lado, se perguntarmos, por exemplo, o valor de $\lim_{x\to\pi/2} \sin(x)$ *a resposta é "evidentemente"*1*, que é o valor da função seno nesse ponto. Mas a resposta só é "evidente"porque estamos a assumir como tal certa propriedade da função. Voltaremos a este ponto mais adiante.*

Exemplo 1.3 *A função*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

satisfaz $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$*. Neste caso, os valores de* $f(x)$ *não se vão aproximando de* 0 *à medida que* x *tende para* $+\infty$*; de facto* $f(x)$ *toma o valor* 0 *infinitas vezes (sempre que* $x = k\pi$ *com* k *inteiro), afasta-se de* 0*, volta a aproximar-se e a tomar o valor* 0*, volta a afastar-se,* *etc. No entanto, ao contrário do que acontece no exemplo anterior (a função seno) essas oscilações vão "amortecendo"à medida que x aumenta e os valores de $f(x)$ ficam portanto todos arbitrariamente próximos de 0 desde que x seja "suficientemente grande".*

Exemplo 1.4 *Calcular o limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x-1}};$$

a dificuldade está no facto de termos um quociente de duas funções cujos valores tendem para $+\infty$, ou seja, temos uma "indeterminação". Podemos fazer o raciocínio seguinte:

$$\frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x-1}} = \frac{2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{3x^2\left(1+\frac{1}{3x}-\frac{1}{3x^2}\right)}} = \frac{2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{3}|x|\sqrt{1+\frac{1}{3x}-\frac{1}{3x^2}}}$$

que, para $x>0$, é igual a

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{3x}-\frac{1}{3x^2}}}.$$

Agora já não existe qualquer indeterminação: temos uma constante a multiplicar por um segundo factor que tem obviamente limite 1 quando $x\to+\infty$; portanto o limite pretendido é $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Exemplo 1.5 *Determinar* $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+3x^2+1}}{x+1}$.
Eliminamos a indeterminação de modo semelhante ao

caso anterior:

$$\frac{\sqrt{x^3+3x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}}{x(1+1/x)} =$$

para $x > 0$

$$= \frac{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}}{x(1+1/x)} = \sqrt{x}g(x)$$

onde $g(x)$ *é uma função que satisfaz* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$. *Concluímos que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+3x^2+1}}{x+1} = +\infty.$$

De facto, o nosso raciocínio diz-nos mais alguma coisa: para x *muito grande* $\frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ *fica muito próximo de* 1, *ou seja os valores* $f(x)$ *tendem para* $+\infty$ *com a mesma ordem de grandeza de* $\sqrt{x}$.

Vamos agora tornar precisas as ideias de "os valores vão-se aproximando", "à medida que x tende para", e outras usadas acima. A definição de limite que vamos apresentar baseia-se na ideia de tornar essas noções calculáveis (pelo menos em potência):

Definição 1.6 *O limite da função* f *no ponto* $a \in \mathbb{R}$ *é* $L \in \mathbb{R}$ *se, dado qualquer erro* $\varepsilon > 0$, *existe um* $\delta > 0$ *de tal modo que se a distância de* x *a* a *for menor que* δ *então a distância de* $f(x)$ *a* L *é menor que* ε. *Na linguagem simbólica matemática*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esta definição tem que ser alterada no caso de a ou L (ou ambos) serem não reais mas $+\infty$ (ou $-\infty$) porque não faz sentido escrever por exemplo $|x - \; +\infty| < \delta$. O sentido preciso de "quando x tende para $+\infty$"é: quando x toma valores arbitrariamente grandes, ou seja, maiores do que qualquer $M \in \mathbb{R}$. Temos então

Definição 1.7

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists M : x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

E, de modo semelhante,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall M \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

Voltamos a alguns dos exemplos anteriores:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

porque dado qualquer $\varepsilon > 0$, temos $|\frac{\sin(x)}{x}| < \varepsilon$ para todo o x suficientemente grande: de facto, como

$$|\frac{\sin(x)}{x}| < \frac{1}{|x|},$$

aquela desigualdade verifica-se desde que $x > 1/\varepsilon$ ou seja, podemos tomar na definição $M = 1/\varepsilon$.

Por outro lado $\lim_{x\to+\infty}\sin(x)$ não existe uma vez que nenhum L (real ou $\pm\infty$) satisfaz a condição dada na definição.
Uma descrição pormenorizada do nosso raciocínio poderia ser, por exemplo, esta: se existisse L tal que

$$\lim_{x\to+\infty}\sin(x) = L,$$

então, escolhendo por exemplo $\varepsilon = 1/4$ teria que ser verdade que $|\sin(x) - L| < 1/4$ para todo o x suficientemente grande, digamos para $x > M$ onde $M \in \mathbb{R}$; a sucessão de pontos $x = k\pi$ toma valores arbitrariamente grandes, ou seja, teremos $k\pi > M$ para todos os inteiros k a partir de um certo ponto; e então teríamos que ter $|\sin(k\pi) - L| < 1/4$ para esses valores de k ou seja, $|L| < 1/4$.
Mas a sucessão $\pi/2 + 2k\pi$ também toma valores arbitrariamente grandes , e portanto teríamos que ter $\sin(\pi/2 + 2k\pi) - L| < 1/4$ ou seja $|1 - L| < 1/4$, ou seja $3/4 < L < 5/4$. Estas duas estimativas contradizem-se entre si, logo não existe limite.

Quando estamos a determinar a existência e o valor do limite de uma função $f(x)$ num ponto (ou em $+\infty$ ou $-\infty$) não precisamos em geral de explicitar como dependem do erro ε os valores de δ ou de M; basta apresentar um raciocínio que deixe claro que esses valores existem.

Um raciocínio desse tipo consiste em comparar $f(x)$ com outras funções. Num dos exemplos anteriores mostrámos que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1$, que é o mesmo que dizer que, dado um $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, temos, para x suficientemente grande,

$$\sqrt{x}(1-\varepsilon) < f(x) < \sqrt{x}(1+\varepsilon),$$

que, como observámos, já nos diz mais do que apenas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Vamos estabelecer outras comparações entre funções que nos vão confirmar os valores de alguns limites conhecidos e fornecer alguma informação adicional.

A definição geométrica das funções trigonométricas implica que

$$\begin{cases} \sin(x) < x < \tan(x) & \text{se } 0 < x < \pi/2 \\ \\ \tan(x) < x < \sin(x) & \text{se } -\pi/2 < x < 0 \end{cases}$$

e em particular $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| < 1$ para todo o $x \neq 0$.
Como consequência destas desigualdades e das fórmulas para a diferença de cosenos (ver Ficha de Revisão sobre Trigonometria), deduzimos por exemplo que, para quaisquer $a, x \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(x) - \cos(a)| = 2\left|\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq |x-a|$$

(isto porque $|\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)| \leq 1$ e $|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)| \leq |x-a|/2$).
Claro que esta estimativa confirma que

$$\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a),$$

mas diz-nos um pouco mais: se quisermos aproximar o valor de $\cos(a)$ por valores conhecidos $\cos(x)$, com um erro menor que um certo $t > 0$, basta tomar valores x

cuja distância a a seja também menor que t.
Por outro lado, se escolhermos $a = 0$, obtemos

$$|\cos(x) - 1| = 2\sin 2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2\left(\frac{x}{2}\right)2,$$

ou seja

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1.$$

Seja $0 < x < \pi/2$; temos nesse intervalo

$$\sin(x) < x < \tan(x) \implies 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)} < \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

donde se deduz que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1;$$

(o limite à esquerda deduz-se de maneira idêntica).