# Matemática I

## 1 Propriedades dos números reais

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais satisfaz algumas propriedades fundamentais: dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, estão definidos a soma $x + y$ e produto $xy$ e tem-se

1. $x + y = y + x$; $\quad x + (y + z) = (x + y) + z$ (a soma é comutativa e associativa);
2. $xy = yx$; $\quad x(yz) = (xy)z$ (o produto é comutativo e associativo);
3. $x(y + z) = xy + xz$ (o produto é distributivo em relação à soma);
4. existe um elemento neutro para a soma (o zero 0) $0 + x = x, \ \forall x$;
5. todo o $x$ tem um simétrico $-x$ tal que $x + (-x) = 0$;
6. existe um elemento neutro para o produto (o um 1) $1x = x$;
7. todo o $x \neq 0$ tem um inverso, que se representa por $x^{-1}$ ou por $\dfrac{1}{x}$, tal que $xx^{-1} = 1$.

Como consequência destas propriedades deduzem-se todas as propriedades aritméticas dos números reais, incluindo as

**"leis do corte"**:

$$x + y = x + z \Rightarrow (-x) + (x + y) = (-x) + (x + z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((-x) + x) + y = ((-x) + x) + z \Rightarrow y = z$$

e

$$x \neq 0 \wedge xy = xz \Rightarrow y = z$$

que implicam por sua vez que o simétrico e o inverso de $x$ são únicos;

e as **"regras de sinais"**: note-se primeiro que, por 5, se tem $a + x = x \Rightarrow a = 0$; portanto, usando 3 e 6,

$$0x + x = (0 + 1)x = x \Rightarrow 0x = 0;$$

e então

$$(-x)y + xy = ((-x) + x)y = 0y = 0$$

donde se conclui que $(-x)y = -(xy)$, e portanto também $(-x)(-y) = -(x(-y)) = xy$.

Estas propriedades são constantemente aplicadas no cálculo; por exemplo, na igualdade, válida para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

esto envolvidas a propriedade comutativa da soma e do produto bem como a distributividade do produto em relação à soma.

Um outro exemplo, em que se aplica esta fórmula:

$$4x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2\frac{1}{4}2x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(2x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \vee 2x + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \vee x = -1$$

Este exemplo generaliza-se facilmente para a dedução da conhecida fórmula resolvente dos polinómios de segundo grau.

Além disso, está definida em $\mathbb{R}$ uma relação $<$ satisfazendo as condições seguintes:

8 $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$;

9 $\forall x, y$ verifica-se uma e uma só das condições

$$x < y, \qquad y < x, \qquad x = y;$$

10 $x < y \Rightarrow x + z < y + z$;

11 $x < y \wedge 0 < z \Rightarrow xz < yz$;

As propriedades 8 e 9 definem $<$ como uma **relação de ordem total**, enquanto que 10 e 11 descrevem a relação entre a ordem e as operações aritméticas.

Usamos igualmente a notação $x \leq y$ para a condição $x < y \vee x = y$. O conjunto dos números reais positivos, ou seja

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$$

designa-se $\mathbb{R}^+$.

Como consequência destas propriedades:

a) $0 < x < y \Rightarrow 0 < (y)^{-1} < x^{-1}$;

b) $x < y \Rightarrow -y < -x$;

c) $\forall k \in \mathbb{N} \qquad 0 < x < y \Rightarrow 0 < x^k < y^k$;

d) $\forall x \neq 0 \qquad 0 < x^2$.

Dados reais $a < b$, o **intervalo aberto** $]a, b[$ é definido como sendo o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, e o **intervalo fechado** $[a, b]$ é $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
Usamos também a notação

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \qquad ]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

e expressões análogas para os intervalos fechados correspondentes.

Esta relação de ordem permite representar os números como pontos numa recta. A função **módulo** ou valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ \\ -x & \text{se} x < 0 \end{cases}$$

corresponde à noção geométrica de distância: $|x - y|$ é a distância entre os pontos correspondentes. O módulo satisfaz as propriedades

a) $|x - a| < b \Leftrightarrow -b < x - a < b$

b) $|x + y| \leq |x| + |y|$

c) $|xy| = |x||y|$

d) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

e) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Segue-se um exemplo de aplicação das propriedades enunciadas à resolução de inequações:

**Exemplo**: Determinar as soluções de

$$\frac{x^2 - 1}{|x| - |x - 1|} \leq 0$$

Para $x > 1$, $|x| = x$ e $|x - 1| = x - 1$, e a desigualdade fica equivalente a

$$\frac{x^2 - 1}{x - (x - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 < 1$$

Portanto não existem soluções da inequação em $]1, +\infty[$.
Se $0 \leq x \leq 1$, $|x| = x$ mas $|x - 1| = 1 - x$, e portanto a desigualdade fica equivalente a

$$\frac{x^2 - 1}{2x - 1} \leq 0$$

Como naquele intervalo $x^2 - 1 \leq 0$, a desigualdade verifica-se se o denominador for positivo ou se o numerador se anular, e obtemos o conjunto solução $]1/2, 1]$.
Para $x < 0$, a desigualdade fica equivalente a

$$\frac{x^2 - 1}{-x - (1 - x)} \leq 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

que, naquele intervalo, é equivalente a $x \leq -1$.
Portanto a inequação inicial tem como conjunto solução

$$] - \infty, -1] \cup ]1/2, 1]$$

## 1.1 Números racionais e irracionais. Princípio dos Intervalos Encaixados

Os números usados em muitas situações práticas elementares (e no cálculo numérico efectivo) são os números racionais, ou seja, os que se podem representar pela razão entre números inteiros

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Quando efectuamos a divisão de $m$ por $n$, obtemos a representação de $\frac{m}{n}$ como uma dízima eventualmente periódica. Por exemplo

$$\frac{5}{6} = 0.833... = 0.8(3)$$

Isso decorre de que os sucessivos restos na divisão tomam sempre valores inteiros entre 0 e $n$, pelo que o valor de algum desses restos tem que ser repetido, dando lugar a uma sucessão eventualmente periódica de dígitos no quociente e de restos.

Reciprocamente, uma dízima eventualmente periódica representa um número racional; seja por exemplo $3.14(15) = 3.14 + 0.00(15)$;

$$3.14 = \frac{314}{100}$$

se $x = 0.(15)$, tem-se $100x = 15 + x$ donde se conclui que $x = \frac{15}{99}$ e portanto

$$3.14(15) = \frac{314}{100} + \frac{15}{9900} = \frac{31101}{9900}$$

O conjunto dos racionais satisfaz todas as propriedades 1 a 11 enunciadas mais acima.
No entanto, mesmo problemas simples exigem a utilização de números irracionais; o primeiro e mais elementar dos exemplos é-nos dados como consequência do Teorema de Pitágoras: o comprimento $a$ da hipotenusa de um triângulo rectângulo com catetos de comprimento 1 tem que satisfazer a equação $a^2 = 2$, ou seja $a = \sqrt{2}$.
Ora, se $a = \frac{m}{n}$ com $m, n$ primos entre si, somos conduzidos a uma contradição:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = a^2 = 2$$

logo $m^2 = 2n^2$ e portanto $m$ é par, digamos $m = 2k$; mas então

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

logo $n^2 = 2k^2$ e portanto $n$ é par.
Assim, $m$ e $n$ são forçosamente ambos pares, contradizendo a hipótese de serem primos entre si. Conclui-se que $a$ não pode ser racional.
Raciocínios do mesmo tipo levam à conclusão de que muitas das soluções de equações do tipo $p(x) = 0$, onde $p(x)$ é um polinómio com coeficientes racionais, não podem ser racionais.

Se quisermos conhecer com maior precisão o valor de $a$, podemos proceder do seguinte modo: começamos por notar que a função

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \qquad f(x) = x^2$$

é monótona crescente, ou seja, se $0 < x < y$ então $x^2 < y^2$.
É óbvio que $1 < a < 2$, isto é, $a \in [1, 2]$; como $(3/2)^2 = 9/4 > 2$, verificamos que $a \in [1, 1.5]$; repetindo o cálculo com o ponto médio deste intervalo temos $(5/4)^2 = \dfrac{25}{16} < 2$ e portanto $a \in [1.25, 1.5]$.

Vamos determinando assim uma sucessão de intervalos

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

de tal modo que o comprimento de $I_n$ é $\dfrac{1}{2^n}$ e $a \in I_n\ \forall n$; por exemplo, para $n = 25$ obtemos

$$1.41406247 < a < 1.41406250$$

e é intuitivamente claro que $a$ deve ser o único número real que pertence a todos estes intervalos, ou seja

$$\{a\} = \bigcap_{n \geq 0} I_n.$$

**Nota**: É claro que a condição necessária para que a intersecção dos intervalos contenha um único elemento não é que o comprimento de $I_n$ seja $\dfrac{1}{2^n}$, mas sim que esses comprimentos tomem valores arbitrariamente pequenos.
Podemos então enunciar a propriedade descrita da seguinte forma:

**Princípio dos Intervalos Encaixados**: Se

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

é uma sucessão de intervalos fechados encaixados com $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, tal que

$$\forall m \in \mathbb{N} \, \exists n : \, b_n - a_n < \frac{1}{m},$$

então existe um único $s$ que pertence à intersecção de todos os intervalos $I_n$:

$$\{s\} = \bigcap_{n \geq 0} I_n$$

Este Princípio não é válido em $\mathbb{Q}$, como vimos atrás pelo exemplo das aproximações de $\sqrt{2}$; e por outro lado a sua validade em $\mathbb{R}$ não pode ser deduzida das outras propriedades fundamentais dos números reais, descritas anteriormente.
Mas, juntamente com elas, ele permite caracterizar completamente o conjunto dos números reais: $\mathbb{R}$ é um **corpo** (propriedades 1 a 7) **ordenado** (propriedades 8 a 11) **completo** (validade do Princípio dos Intervalos Encaixados).

Note-se que quando representamos um número real como uma dízima infinita, estamos precisamente a definir uma sucessão de intervalos encaixados cuja intersecção é esse número; por exemplo:

$$\pi = 3.1415926535897932384626 4...$$

quer dizer que

$$\begin{array}{ll}
3 < \pi < 4 & \pi \in I_0 = [3, 4] \\
3.1 < \pi < 3.2 & \pi \in I_1 = [3.1, 3.2] \\
3.14 < \pi < 3.15 & \pi \in I_2 = [3.14, 3.15] \\
\ldots & \\
a < \pi < b & \pi \in I_{18} = [a, b] \\
\ldots &
\end{array}$$

onde $a = 3.141592653589793238 \qquad b = 3.141592653589793239$.

Os irracionais correspondem às dízimas infinitas não periódicas. Dados racionais $a < b$ existem sempre irracionais no intervalo $[a, b]$; por exemplo, se $m \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{1}{m} < b - a$, um desses irracionais é

$$a + \frac{\sqrt{2}}{2m}$$

Mas dados irracionais $\alpha < \beta$ também existem racionais no intervalo $[\alpha, \beta]$: se as expansões decimais de $\alpha$ e $\beta$ coincidem até ao n-ésimo dígito (e portanto o (n+1)-ésimo dígito de $\beta$ é maior que o de $\alpha$), basta considerar o racional representado pela dízima finita dada pela expansão decimal de $\beta$ até ao (n+1)-ésimo dígito, seguida de zeros.

### 1.1.1 O Axioma do supremo

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se **majorado** se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $X \subset ]-\infty, a[$; qualquer $a$ que satisfaça esta condição chama-se um **majorante** de $X$.
Analogamente, $X$ diz-se **minorado** se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $X \subset ]a, +\infty[$, e qualquer $a$ que satisfaça esta condição chama-se um **minorante** de $X$.
$X$ é **limitado** se for majorado e minorado.
É claro que se $a$ for majorante de $X$, qualquer real maior que $a$ também o é: o conjunto dos majorantes de $X$ não é ele próprio majorado; mas o princípio dos intervalos encaixados é equivalente ao

**Axioma do supremo**: Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e majorado, o conjunto dos majorantes de $X$ tem um elemento mínimo $sup(X)$, que se designa o **supremo** de $X$.

Ou seja, $sup(X)$ é um majorante de $X$ e qualquer outro majorante $b$ é maior que $sup(X)$.

Esta proposição é ainda equivalente a

Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e minorado, o conjunto dos minorantes de $X$ tem um elemento máximo $inf(X)$, que se designa o **ínfimo** de $X$; ou seja, $inf(X)$ é um minorante de $X$ e qualquer outro minorante $c$ é menor que $inf(X)$.

De facto, dizer que o conjunto $X$ tem ínfimo é equivalente a dizer que

$$-X = \{y \in \mathbb{R} : -y \in X\}$$

tem supremo, e vice-versa.

Dado um conjunto majorado $X$, $sup(X)$ é o real que satisfaz as duas condições:

i) $\forall x \in X \; x \leq sup(X)$

ii) $\forall \delta > 0, \exists x \in X : sup(X) - \delta < x$

Ou seja, i) diz que $sup(X)$ é majorante de $X$, e ii) diz que nenhum real menor que $sup(X)$ é majorante de $X$.
Se $sup(X) \in X$ então ele é o máximo de $X$.

# 2 Funções reais de variável real

## 2.1 Noções básicas

Em termos muito gerais, uma função $f$ é uma correspondência unívoca entre elementos de um conjunto $D$ (o **domínio** da função) e elementos de um conjunto $C$ ( o espaço de chegada ou contra-domínio).
Isso significa que para cada $x \in D$ existe um único elemento $y \in C$ que lhe corresponde (a imagem de $x$ por $f$) e representamos essa relação por $y = f(x)$.
O conjunto dos elementos $y \in C$ que são imagem de algum $x \in D$

designa-se por imagem de $f$, $f(D)$.
Se $X \subset D$, a imagem de $X$ por $f$ é

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\};$$

se $Y \subset C$, a imagem inversa (ou pré-imagem) de $Y$ por $f$ é

$$f^{-1}(Y) = \{x \in D : f(x) \in Y\}.$$

Esta notação não deve ser confundida com a de função inversa (ver adiante).

**Definição 2.1** *Dada uma função $f : D \to C$ diz-se que $f$ é* ***injectiva*** *se elementos diferentes têm imagens diferentes; dito de outro modo*

$$\forall x, y \in D \; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

*$f$ diz-se* ***sobrejectiva*** *se a sua imagem coincide com o contra-domínio, ou seja, se todo o elemento do contr-domínio é de facto imagem de algum $x \in D$.*
*Se $f$ é injectiva e sobrejectiva, dizemos que é bijectiva ou uma bijecção.*

Por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é injectiva nem sobrejectiva: por um lado $f(x) = f(-x)$ para todo o $x$, e por outro, como $x^2 \geq 0$, nenhum $y < 0$ pertence à imagem de $f$.
Mas se definirmos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ pela mesma expressão, $f$ é uma bijecção.

Se o domínio e contradomínio de $f$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f$ é uma funçã real de variável real.

**Definição 2.2** *A função $f$ diz-se majorada, minorada ou limitada se o seu conjunto imagem é, respectivamente majorado, minorado ou limitado.*

**Definição 2.3** *A função*

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

*diz-se crescente se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ e estritamente crescente se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$; as definições de decrescente e estritamente decrescente são semelhantes.*
*Uma função crescente ou decrescente diz-se monótona.*

Dadas funções $f$ e $g$ definidas num domínio comum $D \subset \mathbb{R}$ e contra-domínio $\mathbb{R}$, ficam definidas as suas soma e produto, com o mesmo domínio

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Se $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D' \subset f(D) \to \mathbb{R}$, fica definida a função composta

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \qquad g \circ f(x) = g(f(x))$$

Convém sempre lembrar que a operação de composição não é comutativa: em geral $g \circ f \neq f \circ g$, mesmo quando ambas podem ser definidas. Por exemplo, se

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, f(x) = x + 1$$

e

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, g(x) = x^2$$

tem-se $g \circ f(x) = (x+1)^2$ mas $f \circ g(x) = x^2 + 1$.

Se $f$ for uma bijecção, podemos definir no conjunto $f(D)$ a sua função inversa para a composição

$$f^{-1} : f(D) \to D$$

onde $f^{-1}(y)$ é definido como o $x \in D$ tal que $f(x) = y$.