Matemática I

MA - 2017/2018 - semestre 1

Teste II 18/12/17

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos.

O Teste consiste nas perguntas 1, 2, 3, 4, e uma das perguntas 5 e 6. No caso de serem respondidas as duas perguntas, será considerada a que obtiver melhor cotação.

1 (2 v.) - Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Mostrar que a equação $Au = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$, onde $u \in \mathbb{R}^4$, tem solução se e só se $a = 5$.

b) Determinar as soluções para $a = 5$ e uma base do núcleo de A.

c) Qual a dimensão da imagem de A?

2 (2 v.) - Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcular a inversa de B.

b) Sendo C uma matriz 3×3 com determinante igual a -4, qual o valor do determinante das matrizes BC e C^2B^{-1}?

3 (2 v.) - Determinar uma equação cartesiana e uma representação paramétrica do plano contido em $\mathbb{R}^3$ e que contém os pontos $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 3)$ e $(2, 0, 1)$.
Determinar a projecção ortogonal de $(0, 0, 0)$ sobre o plano.

4 (2 v.) - A aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ permuta ciclicamente os vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da seguinte forma:

$$f(v_1) = v_2, \;\; f(v_2) = v_3, \;\; f(v_3) = v_1.$$

Determinar a matriz que representa f relativamente à base canónica.

5 (2 v.) - $\mathcal{P}_k$ representa o espaço vectorial dos polinómios $p(t)$ de grau menor ou igual a k, com coeficientes reais.
Seja $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_4$ a função definida por

$$f(p(t)) = t^2 p(t-1) - 2tp'(t) + p(-1).$$

Mostrar que f é uma aplicação linear determinando a sua matriz relativamente às bases $1, t, t^2$ e $1, t, t^2, t^3, t^4$.
O polinómio $t^4 - 1$ pertence à imagem de f?

6 (2 v.) - A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ tem valores próprios -1 e 2.
Determinar uma base de vectores próprios e usá-la para determinar $A^{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Nota: $2^{10} = 1048$.