

Matemática III - 2024/2025

Trigonometria - Revisão

1 - A primeira imagem no ficheiro anexo representa, numa circunferência de raio 1, a definição geométrica das funções seno, cosseno, tangente e cosecante de um arco $0 < \alpha < \pi/2$ (ou do ângulo respectivo).

Rever essas definições e deduzir as definições de cotangente e secante do mesmo arco.

2 - Deduzir geometricamente as igualdades

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha); \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha);$$

3 - Usando as igualdades de 2, deduzir

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \pi/2) &= -\sin(\alpha) & \sin(\alpha + \pi/2) &= \cos(\alpha) \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos(\alpha) & \sin(\pi - \alpha) &= \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + \pi) &= -\cos(\alpha) & \sin(\alpha + \pi) &= -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos(\alpha) & \sin(\alpha + 2\pi) &= \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{1}$$

4 - Recordar os gráficos das funções seno, cosseno e tangente. As restrições das funções $\sin(x)$ e $\tan(x)$ ao intervalo $] -\pi/2, \pi/2[$ são injectivas, e portanto existem as funções inversas, que se chamam respectivamente $\arcsin(y)$ e $\arctan(y)$. Esboçar os seus gráficos.

A restrição da função $\cos(x)$ ao intervalo $]0, \pi[$ é igualmente injectiva e a sua inversa designa-se $\arccos(y)$. Esboçar o seu gráfico.

5 - Deduzir, usando a segunda imagem no ficheiro anexo, a fórmula

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

no caso em que α , β e $\alpha + \beta$ pertencem ao intervalo $]0, \pi/2[$.

Nota: prova-se, usando as fórmulas dos exercícios 2 e 3, que esta fórmula é válida para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6 - Deduzir, a partir da fórmula do exercício anterior e das igualdades dos exercícios 2, as fórmulas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

e

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}.$$

7 - Recordar o caso especial $\alpha = \beta$ nas fórmulas dos exercícios anteriores e mostrar que

$$\sin(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}, \quad \cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}.$$

8 - Calcular $\sin(\frac{5\pi}{12})$ e $\cos(\frac{\pi}{12})$, usando os valores conhecidos destas funções em $\pi/4$ e $\pi/6$.

9 - Confirmar que

$$\begin{cases} t = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ s = \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = t + s \\ \beta = t - s \end{cases}$$

Deduzir, a partir das fórmulas do seno e do cosseno da soma (exercícios 5 e 6)

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

(2)



TÉCNICO
LISBOA



