

Matemática III - 2024/2025

Exercícios 2

1 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{R: } 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{R: } -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad \text{R: } \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \quad \text{R: } \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{R: } \frac{a}{b} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} \quad \text{R: } 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \sin x)}{(x + \sin x)^2} \quad \text{R: } \frac{3}{2}$$

2 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin^2(x) \quad \text{R: não existe} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1000 \cos(x^{1000})}{x} \quad \text{R: } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \quad \text{R: } \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) \quad \text{R: } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x - 7}{x(1 - 2x)^2} \quad \text{R: } \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^7 + 1} + \cos(x^2)}{x^3 + \sqrt{x^5 + 1} + 3} \quad \text{R: } 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{3x + 1} \quad \text{R: } -\frac{1}{3}$$

3 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x - 2|}{|2x - 1| - |x + 1|} \qquad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x|x - 2|}{|2x - 1| - |x + 1|}$$

R: O primeiro limite é $-\frac{2}{3}$. O segundo não existe: os limites laterais são diferentes

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x|x - 2|}{|2x - 1| - |x + 1|} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{(2x - 1) - (x + 1)} = 2$$

mas

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x|x - 2|}{|2x - 1| - |x + 1|} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(2 - x)}{(2x - 1) - (x + 1)} = -2$$

4 - Determinar as constantes a e b , de modo a que se verifique

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 8$$

R: Para que o limite seja finito é necessário que o numerador se anule para $x = 3$, ou seja, $9 + 3a + b = 0$; isso implica que $x^2 + ax + b = (x - 3)(x - c)$ para algum c ; o limite pedido implica então que $3 - c = 8$. Por outro lado, esta factorização implica que $a = -(3 + c)$ e $b = 3c$.

Juntando todas estas condições chegamos a $a = 2$ e $b = -15$.

5 - Calcular, ou mostrar que não existem, os limites das sucessões:

$$\frac{\sqrt{n^2-1}+(-1)^n n}{2n+3} \quad \text{R: não existe} \quad \frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}} \quad \text{R: } \frac{1}{2}$$

$$\frac{(3^n+1)^2}{1+7^n} \quad \text{R: } +\infty \quad \frac{2^{n+3}+5^{n+1}}{3^{n+2}+5^{n+4}} \quad \text{R: } \frac{1}{5^3}$$

$$\frac{n+(-1)^n(n+1)}{n+\sqrt{n}+1} \quad \text{R: não existe} \quad \frac{n^{2017}+2017^n}{(3n)^{13}+13^{3n}} \quad \text{R: } 0$$

6 - Sejam a, b dois reais positivos. Calcular, ou mostrar que não existem, os limites das sucessões:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \quad \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$$

R: Os limites dependem da relação entre os valores de a e b :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \begin{cases} a & \text{se } a \geq b \\ b & \text{se } b \geq a \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n} = \begin{cases} b & \text{se } a < b \\ 1 & \text{se } a = b \\ \frac{1}{a} & \text{se } b < a \end{cases}$$