

# Matemática III - 2024/2025

## Exercícios 1

1 - Representar sob a forma de uma união de intervalos os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 5| \geq 3|x + 3|\} \quad \text{R: } [-7, -1]$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| + |x - 4| < 8\} \quad \text{R: } ] - 3, 5[$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq x\} \quad \text{R: } [1, 2]$$

2 - Esboçar o gráfico das seguintes funções

a)  $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 2|$ ;

b)  $|x + 1| - |x - 1|$ ;

c)  $|x^2 - 1|$ ;

3 - Representar sob a forma de uma união de intervalos os conjuntos

a)  $X = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x-2} \leq 1\} \quad \text{R: } [-3, 2[$ ;

b)  $Y = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < x\} \quad \text{R: } ] - 1, 0[ \cup ] 1, +\infty[$ ;

c)  $Z = \{x \in \mathbb{R} : (x + 1)(x^3 + x - 2) \leq 0\} \quad \text{R: } [-1, 1]$ ;

d)  $W = \{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-3)(x^2-2)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0\} \quad \text{R: } ]-\infty, -\sqrt{2}] \cup ]1/2, \sqrt{2}] \cup ]2, 3]$ .

4 - Determinar o conjunto solução, em  $\mathbb{R}$ , das inequações

a)  $x^3 - 6x < x^2 \quad \text{R: } ] - \infty, -2[ \cup ] 0, 3[$ ;

b)  $x + \frac{1}{x} > 4 \quad \text{R: } ] 0, 2 - \sqrt{3}[ \cup ] 2 + \sqrt{3}, +\infty[$ ;

c)  $x > \frac{2}{x+1} \quad \text{R: } ] - 2, -1[ \cup ] 1, +\infty[$ ;

d)  $x + 2 < \frac{2}{x(x-1)} \quad \text{R: } ] - \infty, -\sqrt{2}[ \cup ] - 1, 0[ \cup ] 1, \sqrt{2}[$ ;

$$\text{e) } \frac{x-2}{3} < \sqrt{x+2} \quad \text{R: } [2, 14[;$$

$$\text{f) } \sqrt{x+1} < \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} \quad \text{R: } ]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[;$$

$$\text{g) } |2|x-1|-3| < 6 \quad \text{R: } ]-\frac{7}{2}, \frac{11}{2}[;$$

$$\text{h) } |x+2| > \frac{|x|}{x-1} \quad \text{R: } ]-\infty, 1[ \cup ]\sqrt{2}, +\infty[$$

5 - Sendo  $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$  e  $X$  o conjunto do problema 2, determinar os conjuntos

$$\{f(x) : x \in X\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in X\}$$

.

$$\text{R: } \{f(x) : x \in X\} = [2/5, 4] \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in X\} = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[.$$

6 - Sendo  $p(x) = (x+1)(x-2)$ , determinar o domínio e a expressão analítica das funções

$$f(x) = |p(x)| - p(|x|); \quad g(x) = \frac{1}{|p(x)| + p(|x|)}$$

R: as funções são

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 2 \\ -2x^2 + 2x + 4 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -2x^2 + 4 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2-2x-4} & \text{se } x > 2 \\ \text{não definida} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2x} & \text{se } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2x^2-4} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

7 - Qual é o menor intervalo fechado  $I$  que contém o conjunto

$$U = \left\{ (-1)^{n+1} \left( 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}?$$

E se for um intervalo aberto?

R: O menor intervalo fechado é  $I = [-5/2, 2]$ . Não existe um intervalo aberto contendo  $U$  que contenha qualquer outro intervalo aberto com a mesma propriedade.