

Matemática III

MA - 2024/2025

Teste 1 (modelo de preparação)

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos.

1 - Representar na forma de uma união de intervalos o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 9 \leq 9|x - 1|\}.$$

2 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x} - 1} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + x.$$

3 - Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

a) Calcular a derivada f' de f .

b) Justificar que o conjunto $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ (a imagem de f) é um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ e determinar os seus extremos.

4 - Calcular em que ponto do intervalo $[0, 1]$ é que o produto das distâncias a -1 , 1 e 0 é máximo.

5 - Determinar a equação das rectas tangentes à parábola $y = x^2 - x + 3$ que passam no ponto $(0, -1)$.

6 - Mostrar, aplicando o Teorema do Valor Médio de Lagrange, que

$$|\sin(x)| \leq x \text{ e } |\cos(x) - 1| \leq x^2,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.