

Os números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

1. Estão definidas as operações de soma $a + b$ e produto ab , ambas comutativas e associativas:

$$a+b = b+a, (a+b)+c = a+(b+c) \quad ab = ba, (ab)c = a(bc)$$

2. Existem os elementos neutros para a soma e para o produto

$$0 + a = a, \quad 1a = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

3. Vale a "lei do corte"

$$ac = bc \wedge c \neq 0 \implies a = b$$

4. $a(b + c) = ab + ac$

Ordem

O conjunto \mathbb{N} está dotado de uma relação de ordem

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a + n = b$$

Usamos a notação $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$.

5. \leq é uma **relação de ordem total**: $\forall a, b \in \mathbb{N}$ verifica-se uma e uma só das condições

$$a < b \quad b < a \quad a = b$$

6. **Princípio da Boa Ordenação**: Se $X \subset \mathbb{N}$ é não vazio, então X tem um *primeiro elemento*:

$$\exists x_0 \in X : x < x_0 \implies x \notin X$$

Números Inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

O conjunto dos inteiros satisfaz as propriedades 1. - 5. e além disso,

$$- \forall a \in \mathbb{Z} \exists^1 (-a) \in \mathbb{Z} : a + (-a) = 0$$

$$- \forall a \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N} \vee -a \in \mathbb{N}$$

$$0a = 0 \forall a \in \mathbb{Z}$$

$$ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

$$(-a)(-b) = ab$$

Conjuntos finitos e infinitos

Usaremos a notação

$$[m] = \{x \in \mathbb{N} : x < m\} = \{0, \dots, m-1\}$$

Com esta notação $[0] = \emptyset$.

Um conjunto X diz-se finito se existe $m \in \mathbb{N}$ e uma bijecção

$$f : [m] \rightarrow X$$

Diz-se então que X tem m elementos ou que a **cardinalidade** de X é m , usando-se a notação $|X| = m$. Um conjunto X diz-se infinito se não for finito.

Conjuntos finitos e infinitos

Dado um conjunto X , as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) X é infinito;
- ii) Existe uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ injectiva;
- iii) Existe uma função $g : X \rightarrow X$ injectiva e não sobrejectiva.

Princípio de Indução Finita

Se $X \subset \mathbb{N}$ satisfaz as condições

- (i) : $k_0 \in X$,
- (ii) : $k \geq k_0, k \in X \implies k + 1 \in X$,

então

$$X \supset \mathbb{N} \setminus [k_0].$$

Princípio de Indução Finita: Se $P(n)$ é uma dada afirmação referente aos números naturais $n \in \mathbb{N}$ tal que :

- i: $P(k_0)$ é verdadeira;*
- ii: se $(k \geq k_0 \wedge P(k)) \implies P(k + 1)$;*

então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq k_0$.

Se é verdade para os primeiros naturais...

Seja O_n o conjunto dos naturais $k \leq n$ que são produto de um número ímpar de factores primos,

E_n o conjunto dos $k \leq n$ que são o produto de um número par de factores primos.

$|O_n| \geq |E_n| \forall 2 \leq n \leq 10^6$. Verdade para todo o n ?

Falso para $n = 906180352$ e de facto $|O_n| - |E_n|$ troca de sinal infinitas vezes.

Existe algum $y \in \mathbb{N}$, maior que zero, tal que $1141y^2 + 1$ é um quadrado perfeito? Há infinitas soluções mas a menor delas tem 26 algarismos.

Algumas fórmulas importantes

- Se $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, então

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

- **Fórmula do Binómio**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ e $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ($0! = 1$).

- Dados n números reais positivos a_i , $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Princípio de Indução Finita (Forte)

Se $P(n)$ é uma dada afirmação referente aos números naturais $n \in \mathbb{N}$ tal que :

i : $P(k_0)$ é verdadeira;

ii : $(k \geq k_0 \wedge P(k_0) \wedge P(k_0 + 1) \wedge \dots \wedge P(k)) \implies P(k + 1)$;

então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq k_0$.