

# Conjuntos

Um conjunto é caracterizado pelos seus elementos.

Por exemplo:

$$\{2, 4, 6\} =$$

$$\{x : x < 8 \wedge \exists z \in \mathbb{N} : x = 2z\} =$$

$$\{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0\}$$

# Operações

- O conjunto vazio  $\emptyset$  é caracterizado por  $\forall x : x \notin \emptyset$
- $X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\}$
- $X \cap Y = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}$
- $X \setminus Y = \{x : x \in X \wedge x \notin Y\}$
- $X \subset Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$ .  
Se  $Y \subset X$  mas  $Y \neq X$  escrevemos  $Y \subsetneq X$ .
- Quando um conjunto  $A$  é subconjunto de um conjunto fixo  $U$ , denotamos  $U \setminus A$ , o complementar de  $A$ , por  $A^c$  ou por  $\overline{A}$

# Propriedades

- A união e intersecção são operações comutativas e associativas

$$X \cap Y = Y \cap X, \quad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z;$$

$$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z;$$

e distributivas uma sobre a outra

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

- **Leis de Morgan:** dados subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$ ,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \text{ e } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

# Duas Construções Importantes

Conjunto das partes de um conjunto:

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subset X\}$$

Produto cartesiano de dois conjuntos:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

# Funções

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é uma correspondência unívoca entre os elementos do conjunto  $X$  (o domínio ou conjunto de partida) e elementos do conjunto  $Y$  (o contradomínio ou conjunto de chegada)

Se  $f : X \rightarrow Y$ ,  $W \subset X$  e  $Z \subset Y$  definem-se as

- ▶ **imagem** de  $W$  por  $f$ :

$$f(W) = \{f(x) : x \in W\}$$

- ▶ **imagem inversa** de  $Z$  por  $f$ :

$$f^{-1}(Z) = \{x \in X : f(x) \in Z\}$$

# Propriedades

uma função  $f : X \rightarrow Y$  diz-se

1. **injectiva** se

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X;$$

2. **sobrejectiva** se

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y;$$

3. **bijectiva** se for injectiva e sobrejectiva.

# Relações

Uma função com domínio  $X$  e contradomínio  $Y$  é um subconjunto  $f \subset X \times Y$  satisfazendo a propriedade seguinte: para cada  $x \in X$  existe um único  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in f$ .

Generalizando, uma **relação** (binária) entre  $X$  e  $Y$  é um subconjunto  $R \subset X \times Y$ .

$(x, y) \in R$  é também descrito pela notação  $x R y$ .

# Propriedades

Uma relação  $R$  num conjunto  $X$  é

- ▶ **reflexiva** se  $x R x \forall x \in X$
- ▶ **simétrica** se  $x R y \Rightarrow y R x$
- ▶ **anti-simétrica** se  $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$
- ▶ **transitiva** se  $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$



## Relações de ordem e de equivalência

- ▶ Uma relação reflexiva, transitiva e anti-simétrica chama-se uma **relação de ordem (parcial)**;
- ▶ Uma relação de ordem em  $X$  diz-se **total** se

$$\forall x, y \in X \quad x R y \vee y R x.$$

- ▶ Uma relação reflexiva, transitiva e simétrica chama-se uma **relação de equivalência**;

Exemplo: Dado um conjunto  $X$ ,

- ▶ A relação em  $\mathcal{P}(X)$  definida por  $U$  está em relação com  $V$  se  $U \subset V$ , é uma relação de ordem.
- ▶ A relação em  $\mathcal{P}(X)$  definida por  $U$  está em relação com  $V$  se existe uma bijecção  $f : U \rightarrow V$ , é uma relação de equivalência.