

Introdução à Teoria dos Números

Problemas de revisão e Trabalho de Grupo

Atenção: O Trabalho de Grupo a entregar consiste nos problemas **1**, **2** e mais dois à escolha.

- 1- Determinar os pares de inteiros consecutivos tais que a sua soma é divisível por 9 e o seu produto é divisível por 11.
- 2- Determinar o menor inteiro positivo que é solução da equação

$$x^{99} \equiv 103 \pmod{400}.$$

- 3- Mostrar que se p é um primo diferente de 2 e 5, p divide infinitos inteiros da forma $9 \cdots 9$.
Justificar o mesmo se passa para inteiros da forma $1 \cdots 1$.
- 4- Determinar $200 \leq x \leq 2000$ tal que

$$x + x^{201} + x^{501} \equiv 998 \pmod{1000}.$$

- 5- Neste momento, o meu relógio indica que são 22 horas e 36 minutos. Que horas indicaria (se ainda trabalhasse...) daqui a $39^{38^{37}}$ minutos?
- 6- Justificar se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes (ϕ designa a função de Euler):
 - a) Para quaisquer inteiros positivos a e b , $\phi(\text{mdc}(a, b)) = \text{mdc}(\phi(a), \phi(b))$;
 - b) Se $n > 2$ e $\text{mdc}(n, \phi(n)) = 1$ então n é o produto de primos ímpares distintos (ou seja, n é ímpar e livre de quadrados).
- 7- Mostrar que, dado um inteiro positivo M , existem M inteiros positivos consecutivos que não são livres de quadrados.