Introdução à Teoria dos Números

Ficha de preparação (semana de 29/09)

Exercício 0.1 *Determinar qual o menor inteiro $k > 0$ que satisfaz*

$$a^k \equiv 1 \mod m$$

para todo o inteiro primo com m, para $m = 12$ e para $m = 15$.

Exercício 0.2 *Quantas classes de congruência módulo 25 são primas com 5?*
Dado um primo p e $k > 0$, quantas classes de congruência módulo p^k são primas com p?

Exercício 0.3 *Resolver as equações $30x + 12 \equiv 0 \mod m$ para $m = 8$, $m = 9$ e $m = 72$.*
Interpretar a relação entre os resultados.

Exercício 0.4 *Construir uma tabela 5×7 em que as linhas correspondem às classes de congruência módulo 5 e as colunas às classes de congruência módulo 7. Preencher a tabela com as classes módulo 35: por exemplo a classe de 8 módulo 35 fica na linha de 3 e na coluna de 1.*
Comparar com o caso da tabela 4×6 preenchida com as classes de congruência módulo 24.

Exercício 0.5 *Provar que, dados inteiros a e b existe exactamente uma classe módulo 44 congruente com a módulo 4 e congruente com b módulo 11.*
Sejam m, n inteiros positivos primos entre si. Provar que, dados inteiros a e b existe exactamente uma classe módulo mn congruente com a módulo m e congruente com b módulo n.

Problemas (Aula 01/10)

1. Calcular
   a) o resto da divisão de 2^{81} por 43;
   b) o resto da divisão de 2^{81} por 45;
2. Determinar os algarismos das unidades e das dezenas de 7^{27}.
3. Determinar $0 \leq x < 67$ tal que $13x \equiv 5^{95} \mod 67$.
4. Determinar, justificando, as cinco soluções de $\phi(n) = 20$.
5. Justificar que não existe n tal que $\phi(n) = 14$ e que 14 é o menor inteiro positivo par com essa propriedade.
6. Determinar, usando o Teorema Chinês dos Restos, as soluções, se existirem, das equações
$$507x \equiv 312 \mod 3025$$
$$264x \equiv 31 \mod 1573$$
$$732x \equiv 84 \mod 504$$