Introdução à Teoria dos Números
Ficha 1: $0, 1, 2, 3, \cdots$

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ e as suas propriedades mais elementares (propriedades das operações de soma e produto, ordem) são familiares a todos.
Além dessas $\mathbb{N}$ é caracterizado pelo

(Princípio da Boa Ordenação): Se $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$, então X tem um *primeiro elemento*, isto é

$$\exists x_0 \in X : x < x_0 \implies x \notin X$$

Uma consequência do Princípio da Boa Ordenação é o seguinte

Teorema 0.1 (Princípio de Indução Finita) *Se $X \subset \mathbb{N}$ satisfaz as condiçõe*

$$\begin{aligned} \textbf{(i)} &: \ k_0 \in X, \\ \textbf{(ii)} &: \ k \geq k_0, k \in X \implies k+1 \in X, \end{aligned}$$

então

$$\forall x \in \mathbb{N} \land x \geq k_0 \ x \in X.$$

Exercício 0.2 *É um excelente desafio tentar mostrar a equivalência destes dois princípios!*

Este teorema é frequentemente usado da seguinte forma:

0.3 *Princípio de Indução Finita: Se $P(n)$ é uma dada proposição referente aos números naturais $n \in \mathbb{N}$ tal que :*

i: existe um natural k_0 para o qual $P(k_0)$ é verdadeira;

ii: se $k \geq k_0$ *e* $P(k)$ *é verdadeira então* $P(k+1)$ *é verdadeira;*

então $P(n)$ *é verdadeira para qualquer* $n \geq k_0$.

Exemplo 0.4 *Ilustramos a aplicação do Princípio de Indução Finita através de um exemplo simples: provar por indução que a igualdade*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

se verifica para todo o $n \geq 1$.
Começamos por verificar que a igualdade se verifica para $n = 1$, *o que é imediato.*
Em seguida mostramos que, se a igualdade se verificar para um certo natural n *então também se verifica para* $n+1$*: de facto, se*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

então

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ou seja a igualdade é igualmente válida para $n+1$ *como queríamos mostrar. O passo essencial na dedução feita está na segunda igualdade, onde usamos a hipótese de que a igualdade se verifica para* n *para substituir o somatório* $\sum_{k=1}^{n} k$ *por* $\frac{n(n+1)}{2}$.

Atenção: nunca nos podemos esquecer de provar que $P(k_0)$ é verdadeira!

O que se prova no passo

$$P\,(k)\text{ é verdadeira } \implies P\,(k+1)\text{ é verdadeira}$$

é a implicação.

Exercícios

1. "Adivinhar", calculando os primeiros casos, uma fórmula para cada uma das seguintes somas e demonstrá-las :

   a) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\,;$

   b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3;$

2. Determinar experimentalmente uma relação de recorrência satisfeita pelo número máximo (que designamos R_n) de regiões definidas por n rectas no plano. Obter uma fórmula fechada para R_n e demonstrar a sua validade.

3. Analisar a seguinte dedução da fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

   justificando cada um dos passos:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

   Portanto

$$2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)^2 - (n+1) = n(n+1)$$

   Determinar, usando o mesmo método, uma fórmula fechada para a soma:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

4. *(Números de Fibonacci)* Considerar a sucessão de inteiros definida por recorrência por

$$F_1 = 1; F_2 = 1;$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n > 2.$$

F_n é chamado o $n-$ésimo número de Fibonacci.

a) Provar que

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

b) "Adivinhar" e demonstrar identidades para as seguintes expressões:

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = ???; \qquad F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = ???$$

5. O jogo das Torres de Hanoi consiste no seguinte: existem três casas e uma pilha de n discos, de tamanhos decrescentes da base para o topo, na primeira casa; pretende-se mover a pilha para a terceira casa, cumprindo as seguintes regras: só se pode mover um disco de cada vez; não se podem colocar discos maiores sobre discos menores.
Qual é o menor número de movimentos (dependente de n, claro) necessário para terminar o jogo?

6. Demonstrar que, para todo o $n \geq 1$,

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

7. Consegue provar por indução em n que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad \frac{1}{2}\frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \ ?$$

E se fôr

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \ ?$$

8. Demonstrar que, para todo o $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{7}{4} - \frac{1}{n}.$$

9. Mostrar que é possível colorir com duas cores as regiões planas definidas por n circunferências, de modo a que regiões com um arco de fronteira comum tenham cores diferentes.

10. Mostrar que, dados n quadrados, é possível recortá-los em polígonos de modo a formar com estes um novo quadrado.
Sugestão: O único caso difícil é $n = 2$.

11. $\mathbb{N}^k$ é o produto cartesiano de k cópias de $\mathbb{N}$, ou seja,

$$\mathbb{N}^k = \{(x_1, \cdots, x_k) : x_i \in \mathbb{N} \ \forall 1 \leq i \leq k\}.$$

Mostrar que, para todo o $k \geq 1$, existe uma bijecção entre $\mathbb{N}^k$ e $\mathbb{N}$.

12. a) Provar por indução que, para todo o $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)};$$

b) Deduzir (sem usar indução) uma fórmula semelhante para a soma $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+p)}$ onde p é um inteiro positivo .
Sugestão: $\frac{1}{k(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p}\right)$.

13. Demonstrar que se $-1 < a_i < 0$, para todo o $1 \leq i \leq n$, então

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

14. Demonstrar, por indução em n, que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (b_i > 0\ \forall i \leq n \wedge \prod_{i=1}^{n} b_i = 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i \geq n$$

Nota: $\prod_{i=1}^{n} b_i$ designa o produto dos b_i, com $1 \leq i \leq n$.
Sugestão: Se $b_i = 1 \forall i$, o resultado é evidente; caso contrário, notar que se $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{n+1}$ são $n+1$ reais positivos tais que $\prod_{i=1}^{n+1} b_i = 1$, então $b_1 b_2, b_3, \cdots, b_{n+1}$ são n reais positivos cujo produto é 1; podemos supôr além disso que, por exemplo, $b_1 < 1 < b_2$; mostrar que se $0 < a < 1 < b$, então $ab < a + b - 1$.

15. Usar o resultado do problema anterior para demonstrar o seguinte: dados n números reais positivos a_i, $1 \leq i \leq n$, verificam-se as desigualdades

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ou seja, usando a notação para somatórios e produtos,

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{n}$$

As fórmulas acima representam, respectivamente, as médias harmónica, geométrica e aritmética dos números a_i, $1 \leq i \leq n$.

16. Usar as desigualdades do exercício anterior para provar

a) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{2}{3}\ \forall n \geq 1$;

b) $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{n+k} > 1\ \forall n \geq 1$;

Uma outra forma equivalente do Princípio de Indução Finita, por vezes de aplicação mais directa, é a seguinte:

0.5 *Princípio de Indução Finita ("FORTE"):*
Se $P(n)$ é uma dada afirmação referente aos números naturais $n \in \mathbb{N}$ tal que :

i : $P(k_0)$ é verdadeira;

ii : $k \geq k_0$ e $P(k_0), P(k_0+1), \ldots, P(k)$ verdadeiras, implica que $P(k+1)$ é verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq k_0$.

Exercício 0.6 *Outro desafio: mostrar que os dois princípios de indução são logicamente equivalentes.*

Exercício 0.7 *Usar o Princípio de Indução Forte para demonstrar que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é $(n-2)\pi$.*